COGNOME ____________ NOME ____________ Matr. ____________

Firma dello studente ________________________

Analisi Matematica I

20 giugno 2005

Esercizio 1

Determinare i valori a e b per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{se } x < -1 \\ x/2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ be^{x-1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua. Per questi valori di a e b studiare dove è derivabile la funzione f .
Soluzione:

$\boxed{a = b = 1/2. \text{ Per questi valore la funzione è derivabile in } \mathbb{R} \setminus \{-1\}.}$

Calcoli:
La funzione è continua e derivabile in $(-\infty, -1)$, in $(-1, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Dobbiamo studiare cosa succede in $x = -1$ e $x = 1$.
Siccome $f(-1) = -1/2$ e $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} (a - x^2) = a - 1$, f è continua in $x = -1$ se e solo se $a - 1 = -1/2 \Leftrightarrow a = 1/2$.
Per $x = 1$ abbiamo $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{2} = 1/2$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (be^{x-1}) = b$. Pertanto f è continua in $x = 1$ se e solo se $b = 1/2$.
Per questi valori di a e b risulta essere

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < -1 \\ 1/2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2}e^{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Nel punto $x = -1$ si ha:

$$\lim_{x \to (-1)^-} f'(x) = \lim_{x \to (-1)^-} -2x = 2.$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} f'(x) = 1/2 \neq 2$$

Pertanto f non è derivabile in $x = -1$.
Invece per $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2}e^{x-1} = 1/2 = \lim_{x \to 1^-} f'(x).$$

f è derivabile in $x = 1$.

Esercizio 2

Trovare e classificare i valori estremi locali e assoluti della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x+2}e^{-x}$$

nell'intervallo [-1,1].

Soluzione:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Massimo assoluto in } x = -1+\sqrt{3}. \\ \text{Minimo assoluto in } x = -1. \\ \text{In } x = 1 \text{ punto di minimo locale.} \end{array}}$$

Calcoli:

Per trovare i punti di estremo all'interno dell'intervallo vedo dove si azzera la derivata.

$$f'(x) = \frac{x+2-x}{(x+2)^2}e^{-x} - \frac{x}{x+2}e^{-x} = \frac{2-x(x+2)}{(x+2)^2}e^{-x} = -\frac{x^2+2x-2}{(x+2)^2}e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Osserviamo che $-1-\sqrt{3} \notin [-1,1]$.

Per $x \in [-1, -1+\sqrt{3})$, $x^2+2x-2 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$. f è crescente.

Per $x \in (-1+\sqrt{3}, 1]$, $x^2+2x-2 > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. f è decrescente.

Pertanto $x = -1+\sqrt{3}$ è un punto di massimo assoluto. Gli estremi dell'intervallo, $x = -1$ e $x = 1$, sono due punti di minimo locale. Siccome $f(-1) = -e < 0$ e $f(1) = \frac{1}{3}e^{-1} > 0$ il punto di minimo assoluto si ha per $x = -1$.

Esercizio 3

Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$$

Soluzione:

$\boxed{\text{Questo integrale improprio è convergente}}$

Calcoli:
Per $x \to 0$,

$$\sin(\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$$

e

$$(1+x)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}x.$$

Dal criterio del confronto asintotico questo integrale improprio si comporta come

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x/2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

che è convergente. (È della forma $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ con $\alpha = 1/2 < 1$).

Esercizio 4

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + (y^2+1)(x^2+1) = 0 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\boxed{y(x) = \tan\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{x^3}{3} - x\right).}$$

Calcoli:

$$y' = -(y^2+1)(x^2+1)$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = -(x^2+1)\,dx$$

$$\arctan y = -\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C, \quad y = \tan\left[C - (\frac{x^3}{3} + x)\right]$$

$$y(0) = \tan(C) = 1 \Rightarrow C = \pi/4.$$