COGNOME ______ NOME ______ Matr. ______

Firma dello studente ______________________ **A**

I Prova di Analisi Matematica I

27 ottobre 2004

Esercizio 1

Si calcoli il seguente limite in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha \log(1+x^2)}{\sqrt{x}(\cos\sqrt{x}-1)} \; .$$

Risultato: $\boxed{l = \begin{cases} -\infty & \alpha < -1/2 \\ -2 & \alpha = -1/2 \\ 0 & \alpha > -1/2 \end{cases}}$

Calcoli:

Usando i limiti notevoli

$$\log(1+x^2) \sim x^2$$

e

$$1 - \cos\sqrt{x} \sim \frac{x}{2} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha \log(1+x^2)}{\sqrt{x}(\cos\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^{\alpha-1/2}x^2}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x\to 0^+} -2x^{\alpha+1/2}$$

Esercizio 2

Studiare la continuità e la derivabilità della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Disegnare il grafico della derivata.

Dove è continua? $\boxed{\text{In } \mathbb{R}}$

Dove è derivabile? $\boxed{\text{In } \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

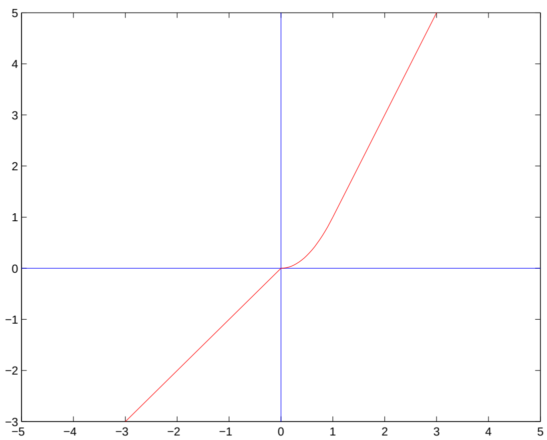
Calcoli e disegni:

f è continua in $(-\infty, 0)$.
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$. Quindi f è continua in zero.
f è continua in $(0, 1)$.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x - 1 = 1$. Quindi f è continua in uno.
f è continua in $(1, +\infty)$.
Pertanto f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

f è derivabile in $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$, quindi f non è derivabile in $x = 0$.
$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2 = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, quindi f è derivabile in $x = 1$.
f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



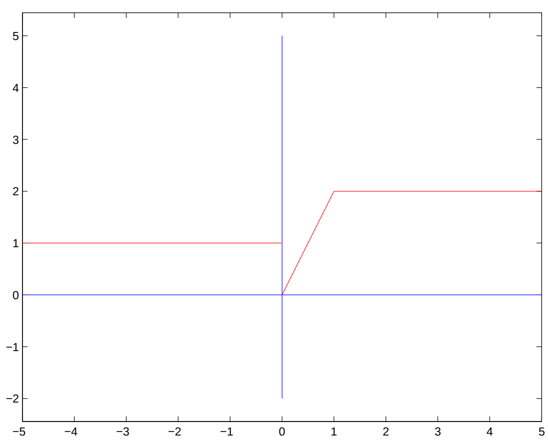


Figure 1: $f(x)$ a sinistra e $f'(x)$ a destra

Esercizio 3

Calcolare la retta tangente al grafico della funzione

$$\log\left(\frac{x^2+2}{x+1}\right)$$

nel punto di ascissa $x = 0$**.**

Soluzione: $\boxed{y = \log 2 - x}$

Calcoli:
Equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto di ascissa x_0:

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

$f(x) = \log\left(\frac{x^2+2}{x+1}\right) = \log(x^2+2) - \log(x+1)$.

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x+1}$.

$f(0) = \log 2, \quad f'(0) = -1.$

Esercizio 4

Trovare e classificare i valori estremi locali e assoluti della funzione

$$f(x) = x^2 \exp(-x)$$

nell'intervallo [-1,3].

Soluzione:

Due punti di massimo relativo: $x = -1$ e $x = 2$. Punto di massimo $x = -1$. Valore massimo $M = e$. Due punti di minimo relativo: $x = 0$ e $x = 3$. Punto di minimo $x = 0$. Valore minimo $m = 0$

Calcoli:

$$f'(x) = (2x - x^2)\exp(-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2.$$

In $(-1, 0)$ la derivata è negativa pertanto la funzione è decrescente.
In $(0, 2)$ la derivata è positiva pertanto la funzione è crescente.
In $(2, 3)$ la derivata è negativa pertanto la funzione è decrescente.
Da qui si ha che $x = -1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo mentre $x = 0$ e $x = 3$ sono punti di minimo relativo.
$f(-1) = e$, $f(2) = 4e^{-2}$. Siccome $e > 4e^{-2}$, $x = -1$ è il punto di massimo assoluto e il valore massimo è $M = e$.
$f(0) = 0$, $f(3) = 9e^{-3}$. Siccome $0 < 9e^{-3}$, $x = 0$ è il punto di minimo assoluto e il valore minimo è $m = 0$.

COGNOME   NOME   Matr.

Firma dello studente ____________________________________

B

I Prova di Analisi Matematica I

27 ottobre 2004

Esercizio 1

Si calcoli il seguente limite in funzione del parametro $\alpha \in I\!R$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha \log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\cos x\sqrt{x}-1)}\ .$$

Risultato: $\boxed{l = \begin{cases} -\infty & \alpha < 3 \\ -2 & \alpha = 3 \\ 0 & \alpha > 3 \end{cases}}$

Calcoli:

Usando i limiti notevoli

$$\log(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$$

e

$$1-\cos(x\sqrt{x}) \sim \frac{x^3}{2}\ ;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha \log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}[\cos(x\sqrt{x})-1]} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^{\alpha-1/2}x^{1/2}}{\frac{1}{2}x^3} = \lim_{x\to 0^+} -2x^{\alpha-3}$$

Esercizio 2

Studiare la continuità e la derivabilità della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1-x & x \le -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ (x-1)^2 & x \ge 1 \end{cases}$$

Disegnare il grafico della derivata.

Dove è continua? $\boxed{\text{In } \mathbb{R}}$

Dove è derivabile? $\boxed{\text{In } \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

Calcoli e disegni:

f è continua in $(-\infty, -1)$.
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(-1-x) = 0$. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$. Quindi f è continua in meno uno.
f è continua in $(-1, 1)$.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1)^2 = 0$. Quindi f è continua in uno.
f è continua in $(1, +\infty)$.
Pertanto f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

f è derivabile in $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ e $(1, +\infty)$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ 2(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = -1 \ne 0 = \lim_{x\to -1^-} f'(x)$, quindi f non è derivabile in $x = -1$.
$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0 = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2(x-1)$, quindi f è derivabile in $x = 1$.
f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

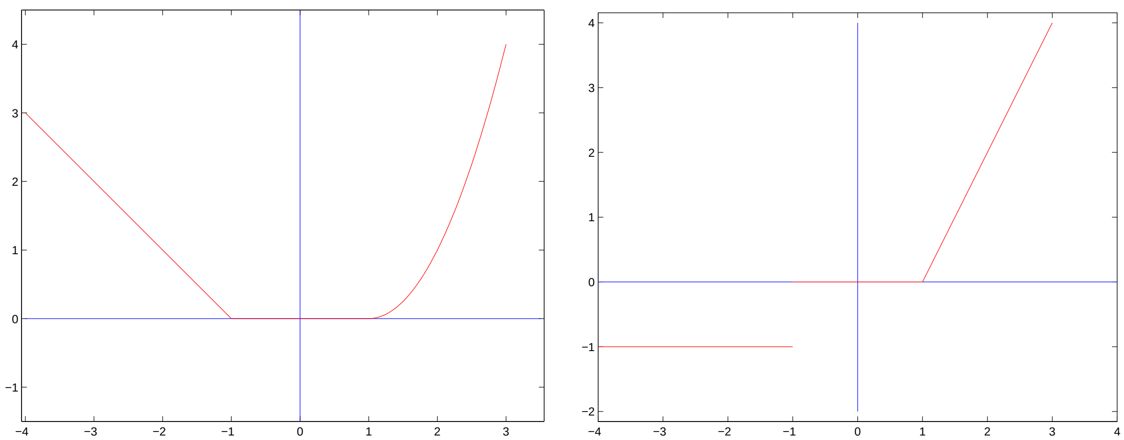


Figure 2: $f(x)$ a sinistra e $f'(x)$ a destra

Esercizio 3

Calcolare la retta tangente al grafico della funzione

$$\log(\sqrt{x^2 + x + 4})$$

nel punto di ascissa $x = 0$.

Soluzione: $\boxed{y = \log 2 + \frac{1}{8}x}$

Calcoli:
Equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto di ascissa x_0:

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

$f(x) = \log(\sqrt{x^2 + x + 4}) = \frac{1}{2}\log(x^2 + x + 4)$.

$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+4}$.

$f(0) = \log 2, \quad f'(0) = \frac{1}{8}$.

Esercizio 4

Trovare e classificare i valori estremi locali e assoluti della funzione

$$f(x) = x\exp(-x^2)$$

nell'intervallo [-2,2].

Soluzione:

Due punti di massimo relativo $x = -2$ e $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Punto di massimo $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Valore massimo $M = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$. Due punti di minimo relativo: $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ e $x = 2$. Punto di minimo $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Valore minimo $m = -\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$

Calcoli:

$$f'(x) = (1 + x(-2x)\exp(-x^2) = (1 - 2x^2)\exp(-x^2) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}},\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

In $(-2, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ la derivata è negativa pertanto la funzione è decrescente.
In $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ la derivata è positiva pertanto la funzione è crescente.
In $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ la derivata è negativa pertanto la funzione è decrescente.
Da qui si ha che $x = -2$ e $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di massimo relativo mentre $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ e $x = 2$ sono punti di minimo relativo.
$f(-2) = -2e^{-4}$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$. Siccome $-2e^{-4} < 0 < \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è il punto di massimo assoluto e $M = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$ il valore di massimo.
Analogamente $f(2) = 2e^{-4}$, $f(\frac{-1}{\sqrt{2}}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$. Siccome $2e^{-4} > 0 > \frac{-1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$ $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ è il punto di minimo assoluto e $m = \frac{-1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$ il valore di minimo.