Esercizio 4

i) Data una funzione f definita nell'intervallo $[a, b]$ denotiamo con $I_N^T(f, a, b)$ l'approssimazione di $I(f, a, b) := \int_a^b f(x)\, dx$ calcolata usando il metodo dei trapezi composita con N sottointervalli. Scrivere una funzione di Matlab che approssimi $I(f, a, b)$ usando il metodo dei trapezi con 8 sottointervalli (senza usare la funzione trapezi scritta al laboratorio) e calcoli una stima dell'errore usando la formula

$$|I(f, a, b) - I_{2N}^T(f, a, b)| \approx \frac{1}{3}|I_{2N}^T(f, a, b) - I_N^T(f, a, b)|\,.$$

La funzione di Matlab deve ricevere come argomenti la funzione da integrare f e gli estremi a e b dell'intervallo d'integrazione; deve restituire $I_8^T(f, a, b)$ e l'errore stimato.

ii) Scrivere un'altra funzione di Matlab analoga alla precedente che, invece del metodo dei trapezi con 8 sottointervalli, usi il metodo di Cavalieri-Simpson con 4 sottointervalli.

05.07.2019

Esercizio 6

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo iterativo del gradiente per l'approssimazione della soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\
&\text{per } k \geq 0 \\
&\quad \mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\,\mathbf{x}^{(k)}) \\
&\quad \alpha_k = \frac{[\mathbf{r}^{(k)}]^T\,\mathbf{r}^{(k)})}{[\mathbf{r}^{(k)}]^T\,A\,\mathbf{r}^{(k)}} \\
&\quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k\,\mathbf{r}^{(k)}
\end{aligned}
$$

05.09.2016

Esercizio 4

Scrivere una FUNZIONE di Matlab che dato un insieme di punti del piano $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$ con $x_i < x_j$ se $i < j$, disegni i grafici di:

- il polinomio interpolatore $\Pi_N(x)$,
- la funzione interpolatoria lineare a tratti $\Pi_1^c(x)$,
- la funzione spline cubica interpolatoria $S_3(x)$;

e calcoli $Q_1 = \int_{x_0}^{x_N} \Pi_N(x)\,dx$ e $Q_2 = \int_{x_0}^{x_N} \Pi_1^c(x)\,dx$.

La funzione deve ricevere in ingresso due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ di uguale lunghezza e restituire i due valori Q_1 e Q_2.

05.09.2018

Esercizio 4

i) Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo della sostituzione in avanti per la risoluzione di un sistema lineare con matrice triangolare inferiore.

ii) Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo iterativo per l'approsimazione della soluzione di un sitema lineare della forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: se P è la parte triangolare inferiore di A e α è un numero reale nell'intervallo $(0, 2)$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\
&\text{Per } k \geq 0 \\
&\quad \mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)} \\
&\quad P\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} \\
&\quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{d}^{(k)}
\end{aligned}$$

La funzione deve ricevere in ingresso la matrice A, il vettore $\mathbf{b}$, il parametro α e il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$.

Il metodo iterativo si deve fermare se il residuo relativo $\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ è minore di 10^{-8} oppure se si superano le 1000 iterazioni.

Questa funzione deve usare il metodo della sostituzione in avanti per la risoluzione del sistema lineare $P\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$.

06.02.2018

Esercizio 4

Scrivere due funzione di Matlab che approssimino

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

usando la forma **composita** della formula di Gauss a due punti

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right]+\frac{(b-a)^5}{20\cdot 6^3}f^{(iv)}(\xi)\,.$$

i) La prima funzione deve ricevere in ingresso la funzione integranda f, gli estremi dell'intervallo d'integrazione a e b e il numero di sottointervalli da considerare nella forma composita. Deve restituire il valore approssimato dell'integrale.

ii) La seconda funzione deve ricevere in ingresso la funzione integranda f, gli estremi dell'intervallo d'integrazione a e b e una tolleranza `toll`. Deve restituire l'integrale approssimato con errore stimato minore di toll e il numero di sottointervalli usati. (Questa seconda funzione può usare la prima e non deve usare più di 2^{10} sottointervalli).

10.01.2018

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo predictor-corrector per l'approssimazione di un problema di Cauchy della forma

$$
\begin{aligned}
&y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, t_0 + T) \\
&y(t_0) = y_0
\end{aligned}
$$

che usa il metodo di Eulero esplicito come metodo predictor e il metodo di Adams-Moulton a due passi come metodo corrector. Per inizializzare la procedura usare il metodo di Eulero esplicito.

10-07-2017

Esercizio 4

Scrivere uno script di Matlab che

i) disegni i grafici delle funzioni $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = 2 - x^2$ nell'intervallo $[-2, 2]$;

ii) approssimi (usando un comando di Matlab) i punti $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$ (con $P_1 < Q_1$) d'intersezione dei due grafici;

iii) approssimi (usando un comando di Matlab) $\int_{P_1}^{Q_1} (g - f)(x)\, dx$;

iv) calcoli il polinomio $\Pi(x)$ che interpola la funzione $g - f$ in 5 punti equispaziati dell'intervallo $[P_1, Q_1]$ (estremi compresi);

v) calcoli $\int_{P_1}^{Q_1} \Pi(x)\, dx$.

12.06.2017

Esercizio 4

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (-3t^2 + 2t - 1)y(t) & t \in (0,1) \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

Scrivere uno SCRIPT di Matlab che permetta di scegliere il numero N di sottointervalli e

i) calcoli la soluzione approssimata di questo problema di Cauchy usando il metodo di Crank-Nicolson con N sottointervalli;

ii) disegni il grafico della soluzione esatta $y(t) = \exp(-t^3 + t^2 - t)$ e della soluzione approssimata;

iii) calcoli l'errore.

14.06.2016

Esercizio 4

a) Scrivere una FUNZIONE di Matlab di nome `pfisso` che implementi l'iterazione di punto fisso

$$\begin{array}{l} x_0 \text{ assegnato} \\ \text{Per } n \geq 0 \\ \quad x_{n+1} = f(x_n)\,. \end{array}$$

- La funzione deve ricevere in ingresso una funzione `fun`, un valore iniziale `x0` e il numero massimo d'iterazioni da fare `nmax`, e restituire in uscita l'ultimo valore x_{n+1} calcolato e il numero d'iterazioni fatte.
- Il metodo iterativo si deve fermare se si raggiunge il numero massimo d'iterazioni (`nmax`) oppure quando il valore assoluto della differenza fra due iterate consecutive sia minore di 10^{-8}.

b) Scrivere uno SCRIPT di Matlab che

- disegni nella stessa finestra il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e della funzione $g(x) = x$,
- calcoli il valore approssimato del punto fisso della funzione f (cioè il valore approssimato della ascissa $\tilde{x}$ tale che $\tilde{x} = f(\tilde{x})$) usando la funzione `pfisso`,
- calcoli anche il valore approssimato di $\tilde{x}$ usando la funzione di matlab `fzero`.

18.02.2013

Esercizio 4

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T) \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$$

1. Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo di Runge-Kutta per l'approssimazione della soluzione:

$$\begin{aligned} & u_0 = y_0 \\ & \text{Per } i \geq 0 \\ & \quad K1 = f(t_i, u_i) \\ & \quad K2 = f(t_i + \tfrac{2h}{3}, u_i + \tfrac{2h}{3} K1) \\ & \quad K3 = f(t_i, u_i + h(-K1 + K2)) \\ & \quad u_{n+1} = u_n + \tfrac{h}{4}(3K2 + K3)\,, \end{aligned}$$

   essendo $t_i = t_0 + i\,h$.

2. Scrivere uno script di Matlab dove si approsimi la soluzione del problema di Cauchy

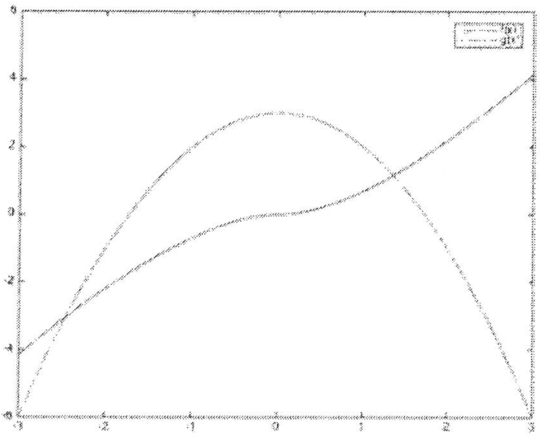
$$\begin{cases} y'(t) = -t(y(t) + 1)^2 & t \in (0, 1) \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

   usando questo metodo di Runge-Kutta, si disegni il grafico della soluzione esatta $y(t) = \frac{2}{t^2+1} - 1$ e della soluzione approssimata e si calcoli l'errore.

22.01.2019

Esercizio 4

Si considerino le funzioni $f(x) = x \log(|x| + 1)$ e $g(x) = 3 - x^2$. Scrivere uno script di Matlab che disegni il grafico delle due funzioni nell'intervallo $(-3, 3)$



e approsimi l'area della regione $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

22.06.2018