Predictor Eulero $\boxed{16\text{-}12\text{-}2019}$

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$$

Corrector Crank-Nicolson

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]$$
$$= \Phi(u_{n+1})$$

u_{n+1} è soluzione di questo problema di punto fisso " $\alpha = \Phi(\alpha)$ "

Provo a usare un'iterazione di punto fisso:

$u_{n+1}^{(0)}$ assegnato

Per $k \geq 0$

$$u_{n+1}^{(k+1)} = \Phi(u_{n+1}^{(k)}).$$

L'idea è partire da un $u_{n+1}^{(0)}$ sufficientemente buono da garantire che dopo "poche" iterazioni del metodo di punto fisso $u_{n+1}^{(k)}$ sia già sufficientemente accurata (vicina al punto fisso u_{n+1})

Se calcolo $u_{n+1}^{(0)}$ usando il <u>metodo di Eulero</u> (che è un metodo di ordine 1) la prima iterazione del metodo di punto fisso mi fornisce già una $u_{n+1}^{(1)} =: u_{n+1}$

che garantisce di avere un metodo di ordine 2.

$$(P) \qquad u^{(0)}_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$$

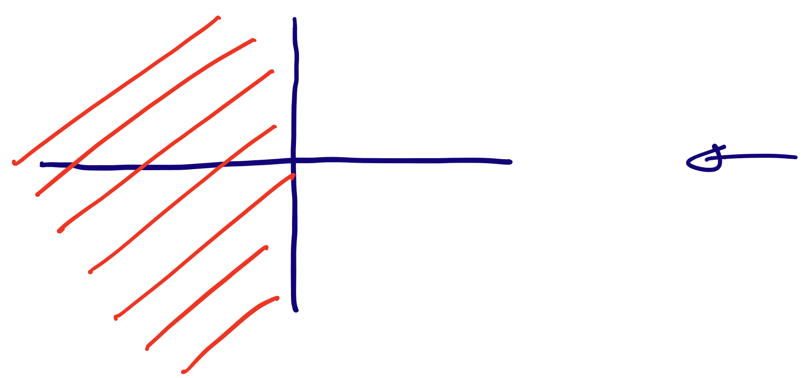
$$(C) \qquad u_{n+1} = u^{(1)}_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1}, \overset{(E)}{u^{(0)}_{n+1}})\right]$$

$$u^{(1)}_{n+1} = \Phi\left(u^{(0)}_{n+1}\right)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1}, u_n + h f(t_n,u_n))\right]$$

Heun (ordine 2)

Regione di assoluta stabilità di Crank-Nicolson



Regione di assoluta stabilità di Heun.

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad t>0$$
$$y(0) = 1.$$

Heun $$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\Big[\underbrace{f(t_n,u_n)}_{\lambda u_n} + \underbrace{f(t_n+h, u_n + h f(t_n,u_n))}_{\lambda(u_n + h \underbrace{f(t_n,u_n)}_{\lambda u_n})}\Big]$$

$$= u_n + \frac{h}{2}\left[\lambda u_n + \lambda u_n + h\lambda^2 u_n\right]$$

$$= u_m + h\lambda u_m + \frac{(h\lambda)^2}{2} u_m$$

$$= \left[1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right] u_m$$

$$= \left[1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right]^{m+1} u_0$$

$$u_m = \left[1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right]^m \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} \right| < 1$$

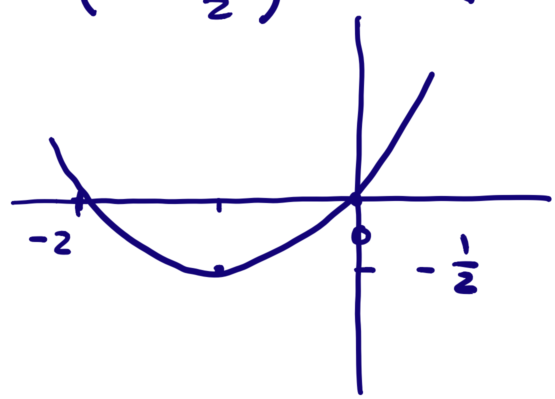
La regione di assoluta stabilità del metodo di Heun è

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| 1 + z + \frac{z^2}{2} \right| < 1 \right\}$$

Se $h\lambda \in \mathbb{R}$ questo vuole dire

$$-1 < 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} < 1$$

$$-2 < h\lambda\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right) < 0 \iff -2 < h\lambda < 0$$



Per Crank-Nicolson se $h\lambda \in \mathbb{R}$ la condizione di assoluta stabilità è $h\lambda < 0$

Siccome $y(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ quando $\lambda < 0$

($y(t)$ soluzione del problema modello) nel metodo di Crank-Nicolson qualsiasi valore di h fornisce una soluzione approssimata $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ quindi si dice che il metodo di Crank-Nicolson è incondizionatamente assolutamente stabile.

Nel metodo di Heun ho una condizione su h se voglio che $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Deve essere $-2 < h\lambda < 0$ quindi se $\lambda < 0$

$h < -\frac{2}{\lambda} = \frac{2}{|\lambda|}$.

Consideriamo adesso questo metodo a due passi

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2h\, f(t_n, u_n)$$

(che si deriva in questo modo:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} y'(t)\, dt = \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, dt$$

?? Punto medio

//

$$y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) \qquad 2h\, f(t_n, y(t_n))$$

$$u_{n+1} - u_{n-1} = 2h\, f(t_n, u_n)$$

Consistenza:

$$\frac{1}{h}\left[y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) - 2h\, y'(t_n)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\Big[\cancel{y(t_n)} + \cancel{h\,y'(t_n)} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''(t_n)} + \frac{h^3}{3!} y'''(t_n) + O(h^4) - \Big(\cancel{y(t_n)} - \cancel{h\,y'(t_n)} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''(t_n)} - \frac{h^3}{3!} y'''(t_n)\Big) - \cancel{2h\,y'(t_n)}\Big]$$

$$= \frac{1}{h} \frac{h^3}{3} y'''(t_n) + O(h^3) = O(h^2)$$

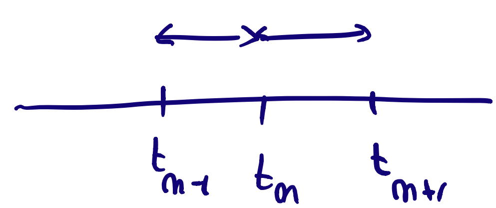
Questo metodo è consistente con ordine 2

Zero stabilità:

Per vedere se questo metodo è zero-stabile devo studiare se verifica la condizione delle radici.

$$u_{n+1} - u_{n-1} = 2h\, f(t_n, u_n)$$

Metodo a due passi:



$$\rho(z) = z^2 - 1$$

Le radici sono due diverse $+1$ e -1 di modulo ≤ 1 quindi è zero-stabile.

Questo metodo <u>è convergente</u>

Per studiare la assoluta stabilità devo studiare le radici di $\Pi(z) = \rho(z) - h\lambda\,\sigma(z)$

(oppure applicare il metodo al problema modello)

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2h\lambda\, u_n$$

$$u_{n+1} - 2h\lambda\, u_n - u_{n-1} = 0$$

$$z^2 - 2h\lambda\, z - 1 = \Pi(z)$$

Le radici di $\Pi(z)$ sono

$$\frac{2h\lambda \pm \sqrt{(2h\lambda)^2+4}}{2} = h\lambda \pm \sqrt{(h\lambda)^2+1}$$

La regione di assoluta stabilità è la regione del piano complesso

$$\{ z \in \mathbb{C} : \ | z \pm \sqrt{z^2+1} \,| < 1 \}$$

Se $h\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda < 0$ allora

$$\underset{\overset{\wedge}{0}}{h\lambda} - \underbrace{\sqrt{(h\lambda)^2+1}}_{\overset{\vee}{1}} < -1$$

$\forall\, h$ ho una radice di $\Pi(z)$ di modulo > 1. Quindi questo metodo non è mai assolutamente stabile.

Incondizionatamente assolutamente instabile.