COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

Calcolo Numerico - III appello

2 settembre 2008

Esercizio 1

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Partendo da $x^{(0)} = [1,1,1]^T$ fare due iterazioni del metodo di Jacobi.

b) Calcolare la matrice di iterazione del metodo di Jacobi.

c) Studiare la convergenza del metodo di Jacobi.

a) Metodo di Jacobi

$$x_1^{(k+1)} = 0 - 4x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left[-3 + 2x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = -1 + x_1^{(k)} - x_3^{(k)}$$

$x_1^{(1)} = -4+2 = -2$

$x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(-3+2-1) = -1$

$x_3^{(1)} = -1+1-1 = -1$

$x_1^{(2)} = -4(-1) - 2 = 2$

$x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(-3-4+1) = -3$

$x_3^{(2)} = -1-2+1 = -2$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad N = P - A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$B_J = P^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Calcolo gli autovalori di B_J

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -4 & 2 \\ 1 & -\lambda & -1/2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 - 2 + 2\lambda + \frac{\lambda}{2} - 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda\left(\frac{1}{2} - 2\right) = -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{3}{2}\right)$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, i$ $\quad \lambda_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\, i$

Il raggio spettrale è $\rho(B_J) = \max\left\{0, \left|\sqrt{\frac{3}{2}}\, i\right|, \left|-\sqrt{\frac{3}{2}}\, i\right|\right\} =$

$= \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$ quindi il metodo di Jacobi non converge.

Esercizio 2

Data l'equazione

$$\frac{1}{x^2+1} = x + \frac{1}{2}$$

a) Dimostrare che ha soluzione nell'intervallo $(0, 1)$.

b) Usando il metodo della bisezione approssimare la soluzione con errore minore di 0.2

c) Usando il metodo di Newton e prendendo come valore iniziale l'approssimazione calcolata col metodo della bisezione, approssimare la soluzione con errore stimato minore di 10^{-3}.

a) $\frac{1}{x^2+1} = x + \frac{1}{2} \iff 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+1\right)$

$1 = x^3 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \iff x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$

$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$ è un polinomio quindi una funzione continua

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -\frac{1}{2} < 0 \\ f(1) = 1 + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \alpha \in (0,1) : f(\alpha) = 0$

b) $x^{(1)} = \frac{1}{2} \qquad |x^{(1)} - \alpha| < \frac{1}{2} = 0.5$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$x^{(2)} = \frac{1}{4} \qquad |x^{(2)} - \alpha| < \frac{1}{4} = 0.25$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1+2+16-32}{64} < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$x^{(3)} = \frac{3}{8} \qquad |x^{(3)} - \alpha| < \frac{1}{8} = 0.125 < 0.2 \qquad$ STOP

c) Newton $\quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{x^{(k)3} + \frac{1}{2}x^{(k)2} + x^{(k)} - \frac{1}{2}}{3x^{(k)2} + x^{(k)} + 1}$

$x^{(0)} = \frac{3}{8}$

$x^{(1)} = \frac{3}{8} - \dfrac{\left(\frac{3}{8}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}}{3\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{8} + 1} = \frac{3}{8} - \dfrac{\frac{27+36-64}{8^3}}{\frac{27+24+64}{8^2}} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8\cdot 115}$

$= \frac{3}{8} + \frac{1}{920} = \frac{346}{920} \qquad |x^{(0)} - x^{(1)}| = \frac{1}{920} > 10^{-3}$

$x^{(2)} = 0.376087 - \frac{0.000002}{1.800411} = 0.376087 - 0.000001 = \underline{0.376086}$

$|x^{(1)} - x^{(2)}| = 0.000001 < 10^{-3} \qquad$ STOP

Esercizio 3

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (2t+1)(y+3) & t \in [1, T] \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

a) Scrivere per questo esempio il metodo di Taylor di ordine 2.

b) Approsimare $y(1.5)$ usando il metodo di Eulero esplicito con passo $h = 0.25$.

c) Approsimare $y(1.5)$ usando il metodo di Taylor di ordine 2 con passo $h = 0.25$.

a) $y' = (2t+1)(y+3) \qquad y'' = 2(y+3) + (2t+1)y' = 2(y+3) + (2t+1)^2(y+3)$

Taylor di ordine 2

$$\begin{cases} u_{m+1} = u_m + h\,(2t_m+1)(u_m+3) + \frac{h^2}{2}(u_m+3)\left[2 + (2t_m+1)^2\right] \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

b) Eulero esplicito $\begin{cases} u_{m+1} = u_m + h\,(2t_m+1)(u_m+3) \\ u_0 = 1 \end{cases}$ $\qquad h = 0.25$

$y(1.5) \simeq u_2$

$u_1 = 1 + \frac{1}{4}(2+1)(1+3) = 1+3 = 4$

$u_2 = 4 + \frac{1}{4}\left(2\frac{5}{4}+1\right)(4+3) = 4 + \frac{1}{4}\,\frac{7}{2}\,7 = \frac{32+49}{8} = \frac{81}{8} = 10.125$

c) $u_1 = 1 + \frac{1}{4}(2+1)(1+3) + \frac{1}{32}(1+3)(2+9) = 4 + \frac{11}{8} = \frac{43}{8}$

$u_2 = \frac{43}{8} + \frac{1}{4}\left(2\frac{5}{4}+1\right)\left(\frac{43}{8}+3\right) + \frac{1}{32}\left(\frac{43}{8}+3\right)\left[2 + \left(2\frac{5}{4}+1\right)^2\right]$

$= \frac{43}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2}\;\frac{67}{8} + \frac{1}{32}\;\frac{67}{8}\left(2 + \frac{49}{4}\right) =$

$= \frac{43}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{67}{8} + \frac{1}{32}\;\frac{67}{8}\;\frac{57}{4} =$

$= \frac{43}{8} + \frac{1}{4}\;\frac{67}{8}\left(\frac{7}{2} + \frac{57}{32}\right) = \frac{43}{8} + \frac{1}{4}\;\frac{67}{8}\;\frac{112+57}{32}$

$= \frac{43}{8} + \frac{67\cdot 169}{1024} = 16.432617$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Crank-Nicolson per l'approssimazione della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (1-2t^2)(y+1) & t \in [0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Crank-Nicolson.

$$u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}\left[(1-2t_m^2)(u_m+1) + (1-2t_{m+1}^2)(u_{m+1}+1)\right]$$

$$u_{m+1}\left[1 - \frac{h}{2}(1-2t_{m+1}^2)\right] = u_m + \frac{h}{2}\left[(1-2t_m^2)(u_m+1) + (1-2t_{m+1}^2)\right]$$

$$u_{m+1} = \frac{u_m + \frac{h}{2}\left[(1-2t_m^2)(u_m+1) + (1-2t_{m+1}^2)\right]}{1 - \frac{h}{2}(1-2t_{m+1}^2)}$$

```
function [t,u] = compito(T, y0, N)
h = T/N;
t=[0:h:T];
u(1) = y0;
for  k=1:N
    num = u(k)+ h/2 * ((1-2*t(k)^2)*(u(k)+1) + (1-2*t(k+1)^2));
    den = 1- h/2 * (1-2*t(k+1)^2);
    u(k+1)= num/den;
end
```