COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

Calcolo Numerico - I prova intermedia

22 aprile 2008

Esercizio 1

Risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

usando il metodo di eliminazione di Gauss con pivotazione parziale per righe.

Nella prima colonna l'elemento di modulo massimo si trova nella terza riga. Scambio quindi la prima e la terza riga.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad m_{21} = \frac{2}{-3} \quad L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{-2}{3}L_1$$

$$m_{31} = \frac{1}{-3} \quad L_3 \longrightarrow L_3 - \frac{-1}{3}L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 2 \\ & 1 & -3+\frac{4}{3} & -2+\frac{4}{3} \\ & -1 & 2+\frac{2}{3} & 1+\frac{2}{3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 2 \\ & 1 & \frac{-5}{3} & -\frac{2}{3} \\ & -1 & \frac{8}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right]$$

Nella seconda colonna i due elementi nelle righe seconda e terza sono di uguale modulo quindi non devo scambiare righe.

$$m_{32} = \frac{-1}{1} \quad L_3 \longrightarrow L_3 - (-1)L_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 2 \\ & 1 & \frac{-5}{3} & -\frac{2}{3} \\ & & \frac{8}{3}+\frac{-5}{3} & \frac{5}{3}+\frac{-2}{3} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 2 \\ & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} \\ & & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$x_3 = 1 \qquad x_2 = \frac{-2}{3} + \frac{5}{3}1 = 1$$

$$x_1 = \frac{-1}{3}\left[2 - 0 - 2\cdot 1\right] = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare la matrice di iterazione del metodo di Jacobi.

b) Studiare la convergenza del metodo di Jacobi.

c) Partendo da $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ fare due iterazioni del metodo di Jacobi.

a) $A = \begin{bmatrix} D & -F \\ -E & \end{bmatrix}$ $\qquad B_J = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $\det(B_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1/3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda}{2} = -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{6}\right).$

Gli autovalori di B_J sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} i$, $\lambda_3 = \frac{-1}{\sqrt{6}} i$

$|\lambda_1| = 0 \qquad |\lambda_2| = |\lambda_3| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\rho(B_J) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{1}{\sqrt{6}} < 1 \Rightarrow$ Jacobi converge.

c) $x_1^{(m+1)} = \frac{1}{2}[3 + x_2^{(m)} + 0]$

$x_2^{(m+1)} = 4 - x_1^{(m)} - x_3^{(m)}$

$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{3}[4 + 0 - x_2^{(m)}]$

$x_1^{(1)} = \frac{1}{2}[3+1] = 2 \qquad x_1^{(2)} = \frac{1}{2}[3+2] = \frac{5}{2}$

$x_2^{(1)} = 4 - 1 - 1 = 2 \qquad x_2^{(2)} = 4 - 2 - 1 = 1$

$x_3^{(1)} = \frac{1}{3}[4-1] = 1 \qquad x_3^{(2)} = \frac{1}{3}[4-2] = \frac{2}{3}$

Esercizio 3

Data l'equazione $x^3 = 2 - 5x$ studiare la convergenza della seguente iterazione di punto fisso per l'approssimazione della soluzione

$$x^{(k+1)} = \frac{2 - [x^{(k)}]^3}{5}.$$

$$x^3 = 2 - 5x \iff 5x = 2 - x^3 \iff x = \frac{2-x^3}{5}$$

x è soluzione di $x^3 = 2 - 5x$ se è solo se x è punto fisso della funzione $\phi(x) = \frac{2-x^3}{5}$ cioè se e solo se $x = \phi(x) = \frac{2-x^3}{5}$

Osserviamo che $x^3 = 2-5x \iff x^3 + 5x - 2 = 0$

Sia $f(x) = x^3 + 5x - 2$ f è continua

$f(0) = -2 < 0$
$f(1) = 1+5-2 > 0$

$\exists\ \alpha \in [0,1] : f(\alpha) = 0$

Osserviamo anche che $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0\ \forall x$, f è crescente

quindi $f(\alpha) = 0$ ha una unica soluzione

Per studiare la convergenza del metodo di punto fisso devo vedere se $|\phi'(\alpha)| < 1$

$\phi(x) = \frac{2-x^3}{5}$ $\phi'(x) = -\frac{3}{5}x^2$

Siccome $\alpha \in [0,1]$ $|\phi'(\alpha)| < |-\frac{3}{5}| = \frac{3}{5} < 1$, se si parte da un $x^{(0)}$ sufficientemente vicino ad α l'iterazione di punto fisso converge.

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	-0.5	0	0.5	1
y_i	-0.8	-0.4	0.1	0.6

a) Calcolare la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

b) Calcolare la forma di Newton del polinomio interpolatore.

a) $\sum x_i = 1 \qquad \sum x_i^2 = 0.25 + 0.25 + 1 = 1.5$

$\sum y_i = -1.2 + 0.7 = -0.5 \qquad \sum x_i y_i = 0.4 + 0.05 + 0.6 = 1.05$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.05 \end{bmatrix}$$

$4a_0 + a_1 = -0.5 \qquad a_0 = \frac{1}{4}[-0.5 - a_1]$

$\frac{1}{4}[-0.5 - a_1] + 1.5 a_1 = 1.05 \qquad 1.25 a_1 = 1.05 + \frac{0.5}{4} = 1.175 \quad a_1 = \frac{1.175}{1.25}$

$a_1 = 0.94 \qquad a_0 = \frac{1}{4}[-0.5 - 0.94] = \frac{-1.44}{4} = -0.36$

Equazione della retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati $\quad y = -0.36 + 0.94x$

b) Differenze divise

-0.5	-0.8			
0	-0.4	$\frac{-0.4+0.8}{0+0.5} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}$		
0.5	0.1	$\frac{0.1+0.4}{0.5-0} = \frac{0.5}{0.5} = 1$	$\frac{1-\frac{4}{5}}{0.5+0.5} = \frac{1}{5}$	
1	0.6	$\frac{0.6-0.1}{1-0.5} = \frac{0.5}{0.5} = 1$	$\frac{1-1}{1-0} = 0$	$\frac{0-\frac{1}{5}}{1+0.5} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}} = \frac{-2}{15}$

Forma di Newton del polinomio interpolatore

$$\Pi_3(x) = -0.8 + \frac{4}{5}(x+0.5) + \frac{1}{5}(x+0.5)x - \frac{2}{15}(x+0.5)x(x-0.5)$$