Interpolazione composita di Lagrange

- Dividiamo l'itervallo $[a, b]$ in N sottointervalli $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, N$. Sia $h_j = x_j - x_{j-1}$ e $h = \max_{1 \leq j \leq N} h_j$.
- Su ciascun intervallo I_j usiamo interpolazione di Lagrange in $m + 1$ punti equispaziati $x_j^{(i)} = x_j + i\frac{h_j}{m}$, $i = 0, \ldots, m$.
- In questo modo si costruisce una funzione $\Pi_h^m f$ continua che non è un polinomio "globale" ma tale che

$$(\Pi_h^m f)_{|I_j} \in \mathbb{P}_m$$

per ogni sottointervallo I_j

Interpolazione composita di Lagrange

In ogni sottointervallo si ha

$$\begin{aligned} \max_{x\in I_j} |f(x) - \Pi_h^m f(x)| &\leq \frac{\prod_{i=0}^m |x - x_j^{(i)}|}{(m+1)!} \max_{x\in I_j} |f^{(m+1)}(x)| \\ &\leq \frac{h_j^{m+1}}{(m+1)!} \max_{x\in I_j} |f^{(m+1)}(x)|, \end{aligned}$$

e in $[a, b]$

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_h^m f(x)| \leq C_m h^{m+1} \max_{x\in[a,b]} |f^{(m+1)}(x)|$$

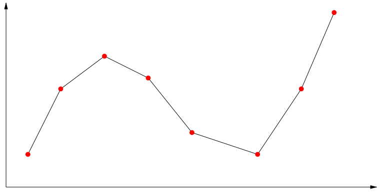
L'errore tende a zero se $h = max_{1\leq j\leq N} h_j$ tende a zero (m é fissato).

Interpolazione composita di Lagrange

Ad esempio se $n = 1$

$$\Pi_h^1 f(x) = f(x_{j-1})\frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j} + f(x_j)\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \quad \text{se } x \in I_j \, .$$

Questa funzione è continua ma non è derivabile. È poco regolare.



Per avere maggiore regolarità si usano le funzioni spline.

Funzioni spline

Le più usate sono le funzioni spline cubiche: funzioni che "globalmente" sono di clase 2 e che "localmente" sono polinomi di grado 3.

$$S(x) \in C^2([a,b])\,, \qquad S_{|[x_{i-1},x_i]} =: s_i \in \mathbb{P}^3 \quad i = 1, \ldots N\,.$$

$$s_i(x) = a_3^{(i)}x^3 + a_2^{(i)}x^2 + a_1^{(i)}x + a_0^{(i)} \quad i = 1, \ldots N$$

Il numero totale di coefficienti $a_j^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 0, 1, 2, 3$ è 4N.

Ma per avere $S(x) \in C^2([a,b])$ ci sono condizioni da verificare:

$S(x)$ continua in [a,b] $\Rightarrow s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) \quad i = 1, \ldots, N-1$

$S'(x)$ definita in [a,b] $\Rightarrow s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i) \quad i = 1, \ldots, N-1$

$S''(x)$ definita in [a,b] $\Rightarrow s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i) \quad i = 1, \ldots, N-1$

$3(N-1)$ condizioni.

Funzioni spline

Le funzioni spline cubiche interpolatorie devono verificare anche

$$S(x_i) = y_i \quad \text{per} \quad i = 0, \ldots, N$$

quindi altre $N + 1$ condizioni.

In totale $4(N - 1) + 2$ condizioni, ma i coefficienti sono $4N$.

Avanzano 2 gradi di libertà che si possono saturare in modi diversi:

- spline periodica

$$S'(a) = S'(b) \text{ e } S''(a) = S''(b)$$

- spline naturale

$$S''(a) = 0 \text{ e } S''(b) = 0$$

- spline vincolata

$$S'(a) = f'(a) \text{ e } S'(b) = f'(b)$$

Funzioni spline

Costruzione (metodo dei momenti):
Chiamiamo

$$h_i := x_i - x_{i-1}\,, \quad f_i := f(x_i)\,, \quad M_i := S''(x_i)\,.$$

Siccome $S_{|[x_{i-1},x_i]} = s_i \in \mathbb{P}_3$ allora $s_i''(x)$ è una retta tale che $s_i''(x_{i-1}) = M_{i-1}$ e $s_i''(x_i) = M_i$, quindi

$$s_i''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\,.$$

e integrando

$$s_i'(x) = -M_{i-1}\tfrac{(x_i-x)^2}{2h_i} + M_i\tfrac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i} + A_i$$

$$s_i(x) = M_{i-1}\tfrac{(x_i-x)^3}{6h_i} + M_i\tfrac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$$

Funzioni spline

Usiamo che $S(x_i) = f_i$ per determinare le costanti A_i e B_i.

$$s_i(x_{i-1}) = M_{i-1}\tfrac{h_i^3}{6h_i} + B_i = f_{i-1} \quad \rightsquigarrow \quad B_i = f_{i-1} - M_{i-1}\tfrac{h_i^2}{6}$$

$$s_i(x_i) = M_i\tfrac{h_i^3}{6h_i} + A_i h_i + B_i = f_i \quad \rightsquigarrow \quad A_i = \tfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - (M_i - M_{i-1})\tfrac{h_i}{6}$$

Imponendo $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$ si ha

$$M_i\frac{h_i}{3} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + M_{i-1}\frac{h_i}{6} = -M_i\frac{h_{i+1}}{3} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - M_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6}\,.$$

Funzioni spline

Si ha pertanto un sistema tridiagonale nelle incognite M_i, $i = 0, \dots, N$.

Per $i = 1, \dots, N-1$

$$M_{i-1}\frac{h_i}{6} + M_i\frac{h_i + h_{i+1}}{3} + M_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\,.$$

Mancano due equazioni

- Spline naturali: $M_0 = M_N = 0$.
- Spline vincolate:

$$s_1'(x_0) = f'(x_0) \quad \rightsquigarrow \quad M_0\tfrac{h_1}{3} + M_1\tfrac{h_1}{6} = -f'(x_0) + \tfrac{f_1 - f_0}{h_1}$$

$$s_N'(x_N) = f'(x_N) \quad \rightsquigarrow \quad M_{N-1}\tfrac{h_N}{6} + M_N\tfrac{h_N}{3} = f'(x_N) - \tfrac{f_N - f_{N-1}}{h_N}$$

Funzioni spline

Stima dell'errore

- $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$;
  $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, N$;
  $h = \max_{1 \le i \le N} h_i$;
- $f \in C^4([a, b])$;
- $S(x)$ funzione spline cubica che interpola f nei nodi $\{x_i\}_{i=0}^N$ e tale che $S'(a) = f'(a)$ e $S'(b) = f'(b)$.

Allora

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(r)}(x) - S^{(r)}(x)| \le C_r h^{4-r} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|, \quad r = 0, 1, 2\,.$$

per certe costanti C_0, C_1 e C_2.

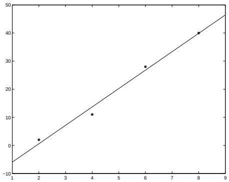
Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Date n+1 coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$, si cerca un polinomio $P_r \in \mathbb{P}_r$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} (P_r(x_i) - y_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (q(x_i) - y_i)^2$$

per ogni $q \in \mathbb{P}_r$.

- Diremo che P_r (se esiste) è il polinomio di grado r di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.
- Per n ed r generici non sarà possibile avere $P_r(x_i) = y_i$ per $i = 0, \ldots, n$. (Esempio $n = 4$, $r = 1$.)



Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Nel caso $r = 1$, $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ dove i coefficienti a_0 e a_1 sono incogniti e tali che (a_0, a_1) è punto di minimo della funzione

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i) - y_i]^2 \,.$$

Il punto di minimo si trova imponendo le condizioni

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0 \,, \quad \frac{\partial \phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0 \,.$$

$$2 \sum_{i=0}^{n} [(a_0 + a_1 x_i) - y_i] = 0 \,, \quad 2 \sum_{i=0}^{n} [(a_0 + a_1 x_i) - y_i] x_i = 0 \,.$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Il corrispondente polinomio di grado 1, $P_1(x) = a_0 + a_1 x$, si chiama retta dei minimi quadrati o retta di regressione.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Per un r generico i coefficienti del polinomio di grado r di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati si calcolano risolvendo il sistema lineare $(r+1) \times (r+1)$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \dots & \sum_{i=0}^{n} x_i^r \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n} x_i^{r+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^r & \sum_{i=0}^{n} x_i^{r+1} & \dots & \sum_{i=0}^{n} x_i^{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^r y_i \end{bmatrix}$$

Se $r = n$ il polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati coincide con il polinomio intepolatore.

Esercizio

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	0	0.1	0.3	0.5
y_i	1.1	1.2	1.7	1.9

- Calcolare la retta dei minimi quadrati.
- Calcolare il polinomio interpolatore.

Differenze divise

Dati i punti $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ si vuole calcolare $\Pi_n(x)$ usando $\Pi_{n-1}(x)$.

$$\Pi_n(x) = \Pi_{n-1}(x) + Q_n(x)$$

$Q_n(x) \in \mathbb{P}_n$ e $Q_n(x_i) = \Pi_n(x_i) - \Pi_{n-1}(x_i) = y_i - y_i = 0$ per $i = 0, \dots, n-1$ quindi

$$Q_n(x) = a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

- Il coefficiente a_n si chiama n-esima differenza divisa di Newton.
- Si indica $a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Differenze divise

Chiamando $y_0 = f[x_0]$, $\omega_0(x) \equiv 1$, $\omega_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)$ se $j > 0$ si ha

$$\Pi_0(x) = f[x_0] = f[x_0]\,\omega_0(x)$$

$$\Pi_1(x) = \Pi_0(x) + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) = f[x_0]\,\omega_0(x) + f[x_0, x_1]\,\omega_1(x)$$

$$\begin{aligned}\Pi_2(x) &= \Pi_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1)\\ &= f[x_0]\,\omega_0(x) + f[x_0, x_1]\,\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\,\omega_2(x)\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\Pi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \omega_j(x) f[x_0, \ldots, x_j]$$

Forma di Newton del polinomio interpolatore.

Differenze divise

Sia $\widetilde{\Pi}_{n-1}(x)$ il polinomio interpolatore nei nodi $x_1, \dots x_n$. Allora

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{x_n - x_0}[\widetilde{\Pi}_{n-1}(x)(x - x_0) - \Pi_{n-1}(x)(x - x_n)]$$

da cui segue che

$$f[x_0, x_1 \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} .$$

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
x_3 & f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
x_4 & f[x_4] & f[x_3, x_4] & f[x_2, x_3, x_4] & f[x_1, x_2, x_3, x_4] & f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]
\end{array}$$

Esercizi

- Calcolare la forma di Newton del polinomio interpolatore dei dati

x_i	0	0.1	0.3
y_i	1.1	1.2	1.7

  e dei dati

x_i	0	0.1	0.3	0.5
y_i	1.1	1.2	1.7	1.9

- Calcolare il polinomio che interpola la funzione $f(x) = x^4 - 3$ nei nodi $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, e nei nodi x_0, x_1, x_2, x_3 e $x_4 = 2$.