Sistemi lineari

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \, , \ i = 1, \ldots, n \quad \rightsquigarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice invertibile ($det(A) \neq 0$).
$\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ vettore termine noto.
$\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ vettore incognito.

Sistemi lineari

La soluzione può essere ottenuta con la regola di Cramer.

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det(A)} \quad j = 1, \ldots, n$$

Δ_j il determinante della matrice ottenuta sostituendo la j-esima colonna di A col vettore termine noto.
Questa formula è troppo costosa.
Numero di operazioni $\rightsquigarrow (n+1)!$.

Risoluzione di sistemi triangolari

Triangolare inferiore:

$$\begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{l_{1,1}} b_1 \\ x_2 &= \frac{1}{l_{2,2}} (b_2 - l_{2,1} x_1) \\ x_3 &= \frac{1}{l_{3,3}} (b_3 - l_{3,1} x_1 - l_{3,2} x_2) \end{aligned}$$

Triangolare superiore:

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{u_{3,3}} b_3 \\ x_2 &= \frac{1}{u_{2,2}} (b_2 - u_{2,3} x_3) \\ x_1 &= \frac{1}{u_{1,1}} (b_1 - u_{1,2} x_2 - u_{1,3} x_3) \end{aligned}$$

Risoluzione di sistemi triangolari

$L\mathbf{x} = \mathbf{b}$

```
for i=1:n
```

$$x_i = \frac{1}{l_{i,i}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j}x_j)$$

```
end
```

`Sostituzioni in avanti`

$U\mathbf{x} = \mathbf{b}$

```
for i=n:-1:1
```

$$x_i = \frac{1}{u_{i,i}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}x_j)$$

```
end
```

`Sostituzioni all'indietro`

Numero di operazioni $\rightsquigarrow n^2$.

Il metodo di eliminazione gaussiana

Si basa sull'idea di ridurre il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ad un sistema equivalente (con la stessa soluzione) triangolare superiore.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - \frac{-1}{2} L_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & -\frac{3}{2}x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & = & 0 \\ & & \frac{7}{2}x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - \frac{7/2}{-3/2} L_2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & -\frac{3}{2}x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Il metodo di eliminazione gaussiana

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 \\ -\frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightsquigarrow U\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

$$A^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} \rightsquigarrow A^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$$

con

$$A^{(1)} = A\,,\ \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}\,, \quad \text{e} \quad A^{(n)} = U\,,\ \mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{c}\,.$$

Vediamo come si passa da $A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$ a $A^{(k+1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k+1)}$

Il metodo di eliminazione gaussiana

$$
\begin{bmatrix}
a_{1,1}^{(k)} & a_{1,2}^{(k)} & \dots & a_{1,k-1}^{(k)} & a_{1,k}^{(k)} & a_{1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{1,n}^{(k)} \\
0 & a_{2,2}^{(k)} & \dots & a_{2,k}^{(k)} & a_{2,k-1}^{(k)} & a_{2,k+1}^{(k)} & \dots & a_{2,n}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{k-1,k-1}^{(k)} & a_{k-1,k}^{(k)} & a_{k-1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k,n}^{(k)} \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k,n}^{(k)} \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k}^{(k)} & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k}^{(k)} & a_{n,k+1}^{(k)} & \dots & a_{n,n}^{(k)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ \vdots \\ b_{k-1}^{(k)} \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)}
\end{bmatrix}
$$

- Le prime k righe non si modificano.
- Dobbiamo azzerare gli elementi nella colonna k-esima sotto la diagonale.

Il metodo di eliminazione gaussiana

for k=1:n-1

  for i=k+1:n

   $m_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$

   for j=k+1:n

    $a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - m_{i,k} a_{k,j}^{(k)}$

   end

   $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{i,k} b_k^{(k)}$

  end

end

- I coefficienti $m_{i,k}$ si chiamano moltiplicatori.
- Gli $a_{k,k}^{(k)}$, detti elementi pivotali, devono essere tutti non nulli.
- Il numero di operazioni è dell'ordine di $2n^3/3$.

Il metodo di eliminazione gaussiana

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 & = & 5 \leadsto m_{1,2} = 2/1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \leadsto m_{1,3} = 1/1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ 0x_2 - 7x_3 & = & -7 \\ -4x_2 - x_3 & = & -5 \leadsto m_{2,3} = -4/0 \ \ ?? \end{array}\right.$$

Ma in realtà il sistema ha soluzione. Scambiando la seconda e la terza riga.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ -4x_2 - x_3 & = & -5 \\ -7x_3 & = & -7 \end{array}\right.$$

Il metodo di eliminazione gaussiana

- Il solo fatto che gli elementi diagonali di A siano diversi da zero non garantisce che gli elementi pivotali siano diversi da zero.
- Se i minori principali d_i di A sono diversi da zero per $i = 1, \ldots, n-1$, allora tutti gli elementi pivotali sono non nulli.
- Classi di matrici con questa proprietà sono:
  - le matrici a dominanza diagonale (per righe o per colonne),
  - le matrici simmetriche e definite positive.

Il metodo di eliminazione gaussiana

Minore principale d_i: determinante della sottomatrice principale A_i costituita dalle prime i righe ed i colonne di A.

Matrici a dominanza diagonale per righe: $|a_{i,i}| > \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$ per $i = 1, \ldots, n$.

Matrici a dominanza diagonale per colonne: $|a_{j,j}| > \sum_{i=1\, i\neq j}^{n} |a_{i,j}|$ per $j = 1, \ldots, n$.

Matrice simmetrica: $A = A^T$.

Matrice simmetrica definita positiva: $A = A^T$ e $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Il MEG come metodo di fattorizzazione

Il MEG equivale a fattorizzare la matrice A nel prodotto di due matrici, $A = LU$ con L triangolare inferiore ed U triangolare superiore.
$A^{(k+1)} = M_k A^{(k)}$ con

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & -m_{k+1,k} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -m_{n,k} & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$U = M_{n-1} \dots M_1 A$$

Il MEG come metodo di fattorizzazione

$$U = M_{n-1} \dots M_1 A$$

$$M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} U = A$$

$$L = M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ m_{2,1} & 1 & & & \vdots \\ m_{3,1} & m_{3,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$LU = A$$

Il MEG come metodo di fattorizzazione

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad A = LU$$

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

- Il costo computazionale del processo di fattorizzazione è lo stesso del MEG $\rightsquigarrow$ $2n^3/3$
- Nota la fattorizzaione, per risolvere un sistema con matrice A devo risolvere due sistemi triangolari $\rightsquigarrow$ $2n^2$ operazioni.
- La stessa fattorizzazione può essere utilizzata per risolvere diversi sistemi di matrice A e termine noto $\mathbf{b}$ variabile. $\rightsquigarrow$ Calcolo dell'inversa

Altri tipi di fattorizzazione

- Se A è non singolare e $A = LU$ allora gli elementi sulla diagonale di U sono tutti diversi da zero.
  Consideriamo la matrice diagonale $D = diag(u_{1,1}, \ldots, u_{n,n})$.
  D è invertibile.
  $A = LU = LDD^{-1}U$. Sia $M^T := D^{-1}U \rightsquigarrow A = LDM^T$.
  M^T è una matrice triangolare superiore con elementi diagonali pari ad uno.
- Se A è simmetrica $M = L \rightsquigarrow A = LDL^T$.
- Se A è simmetrica definita positiva allora $d_i > 0$ per $i = 1, \ldots, n$. Sia $R = L\, diag(\sqrt{d_1}, \ldots \sqrt{d_n}) \rightsquigarrow A = RR^T$.
  Fattorizzazione di Cholesky.