COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

Calcolo Numerico - II prova intermedia - A

15 giugno 2009

Esercizio 1

i) Approssimare

$$I = \int_0^1 (x^2 + 3x + 4)e^{-x}\, dx$$

usando il metodo del punto medio composito con tre sottointervalli.

ii) Stimare il numero di sottointervalli necessari per approssimare I con errore minore di 10^{-4} usando il metodo del punto medio composito.

i) $$\int_0^1 (x^2+3x+4)e^{-x}dx = \int_0^{1/3} (x^2+3x+4)e^{-x}dx + \int_{1/3}^{2/3} (x^2+3x+4)e^{-x}dx + \int_{2/3}^{1} (x^2+3x+4)e^{-x}dx$$

$$\simeq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6^2}+\frac{3}{6}+4\right)e^{-1/6} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2}+4\right)e^{-1/2} + \frac{1}{3}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^2+3\frac{5}{6}+4\right)e^{-5/6}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1+18+144}{36}e^{-1/6} + \frac{1+6+16}{4}e^{-1/2} + \frac{25+90+144}{36}e^{-5/6}\right] = 3.4823$$

ii) $f(x) = (x^2+3x+4)e^{-x}$

$f'(x) = [2x+3-(x^2+3x+4)]e^{-x} = -(x^2+x+1)e^{-x}$

$f''(x) = (-2x-1+x^2+x+1)e^{-x} = (x^2-x)e^{-x}$

$x \in [0,1] \Rightarrow 0 < e^{-x} < 1$ e $|x^2-x| = x-x^2 < \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$|f''(x)| \le \frac{1}{4}$ per $x \in [0,1]$

$$E_{PM}^N = \left| I - I_{PM}^N \right| = \frac{b-a}{24} H^2 |f''(\xi)| = \frac{1}{24}\frac{1}{N^2}|f''(\xi)|$$

$$\le \frac{1}{24}\frac{1}{N^2}\frac{1}{4} < 10^{-4} \quad \text{se} \quad \frac{10^4}{24\cdot 4} < N^2$$

$$\frac{10^2}{4\sqrt{6}} < N \qquad N > \frac{25}{\sqrt{6}} = 10.2062 \qquad \boxed{N \geq 11}$$

Esercizio 2

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+3t}{y} & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

approssimare la soluzione usando il metodo di Taylor di ordine 2 con passo $h = 0.5$.

$$y' = \frac{1+3t}{y} \qquad y'' = \frac{3y - y'(1+3t)}{y^2} = \frac{3y - \frac{(1+3t)^2}{y}}{y^2} = \frac{1}{y}\left[3 - \left(\frac{1+3t}{y}\right)^2\right]$$

Metodo di Taylor di ordine 2

$$u_{n+1} = u_n + h\left[\frac{1+3t_n}{u_n} + \frac{h}{2}\,\frac{1}{u_n}\left(3 - \left(\frac{1+3t_n}{u_n}\right)^2\right)\right]$$

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1}\left(3 - \left(\frac{1}{1}\right)^2\right)\right] = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}2\right) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$u_2 = \frac{7}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1+3/2}{7/4} + \frac{1}{4}\,\frac{4}{7}\left(3 - \left(\frac{1+3/2}{7/4}\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{5/2}{7/4} + \frac{1}{7}\left(3 - \left(\frac{10}{7}\right)^2\right)\right] = \frac{7}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{7} + \frac{1}{7}\,\frac{49 \cdot 3 - 100}{49}\right)$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{1}{14}\left(10 + \frac{47}{49}\right) = \frac{7}{4} + \frac{1}{14}\,\frac{537}{49} = 2.5328$$

Esercizio 3

Verificare la convergenza del seguente metodo a più passi per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy:

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \frac{h}{3}[f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}] .$$

$$u_{n+1} - u_{n-1} = \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$$

È un metodo a due passi. Il polinomio caratteristico è il polinomio di grado 2 $S(r) = r^2 - 1$ che ha radici $r_1 = 1$ $r_2 = -1$. Sono due radici diverse di modulo 1 quindi la condizione delle radici è soddisfatta, il metodo è zero-stabile.

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{h}\left[y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) - \frac{h}{3}(y'(t_{n+1}) + 4y'(t_n) + y'(t_{n-1}))\right]$$

$$= \frac{1}{h}\Big[y(t_n) + hy'(t_n) + O(h^2)$$
$$-(y(t_n) - hy'(t_n) + O(h^2))$$
$$-\frac{h}{3}(y'(t_n) + O(h))$$
$$-\frac{4}{3}h\, y'(t_n)$$
$$-\frac{h}{3}(y'(t_n) + O(h))\Big] =$$

$$= \frac{1}{h}\Big[y(t_n)\underbrace{(1-1)}_{=0} + hy'(t_n)\underbrace{\left(1+1-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)}_{=0}\Big] + O(h) = O(h)$$

L'errore di troncamento tende a zero per h che tende a zero quindi il metodo è consistente.

Zero-stabilità + Consistenza $\Longrightarrow$ convergenza

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che data una funzione f, un intervallo $[a, b]$ e un numero naturale N approssimi $\int_a^b f(x)\,dx$ sostituendo alla funzione f il polinomio interpolatorio di f negli $N+1$ nodi di Chebyshev dell'intervallo $[a, b]$.

La funzione deve:

- ricevere in ingresso la funzione f, gli estremi a e b dell'intervallo di integrazione e il numero naturale N, e restituire il valore approssimato dell'integrale `Iapp`;
- calcolare gli $N+1$ nodi di Chebyshev dell'intervallo $[a, b]$;
- calcolare i valori di f nei nodi di Chebyshev;
- calcolare il polinomio p che interpola la funzione f negli $N+1$ nodi di Chebyshev;
- usando il comando `polyint`, calcolare una primitiva q di p.
- usando la primitiva q, calcolare `Iapp` $= \int_a^b p(x)\,dx$. (Suggerimento: usare il comando `polyval` per valutare $q(a)$ e $q(b)$).

```
function Iapp = esercizio(f,a,b,N)
x=(a+b)/2 - (b-a)/2 * cos(pi*[0:N]/N);
y= feval(f,x);
p= polyfit(x,y,N);
q= polyint(p);
Iapp = polyval(q,b)-polyval(q,a);
```