I polinomi

- Un polinomio in Matlab è dato da un vettore che contiene i sui coefficienti ordinati da a_n fino ad a_0.
- Per valutare un polinomio in uno o più punti si usa il comando `polyval`:

  ```
  >> y = polyval(p,x)
  ```

  - `x` è un vettore dove si specificano le ascisse nelle quale si vuole valutare il polinomio `p`.
  - `y` è un vettore che contine i valori di `p` in `x`.

I polinomi

- Il comando `roots(p)` approssima le radici del polinomio `p`.
- I comandi `polyint(p)` e `polyder(p)` calcolano rispetivamente i coefficienti di una primitiva (quella che si annulla in $x = 0$) e della derivata di `p`.
- Se `x` e `y` sono due vettori di $n + 1$ componenti, il comando `p=polyfit(x,y,n)` calcola il polinomio interpolatore dei dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$.
- Se `x` e `y` sono due vettori di $n + 1$ componenti, il comando `p=polyfit(x,y,m)` calcola i coefficienti del polinomio di grado `m` che approssima le $n + 1$ coppie di valori $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ nel senso dei minimi quadrati.

Esempio di Runge

```
n=input('Grado del polinomio: ');
a=-5;b=5;
h=(b-a)/n;
x=[a:h:b];
fx=1./(x.^2+1);
p=polyfit(x,fx,n);
xx=linspace(a,b);
pxx=polyval(p,xx);
fxx=1./(xx.^2+1);
plot(xx,fxx,xx,pxx,x,fx,'*');
legend('1/(x^2+1)','Polinomio intepolatore','Dati');
```

Nodi di Chebishev

Nell'intervallo $[-1, 1]$

$$\hat{x}_i = -\cos\left(\frac{i\pi}{n}\right) \qquad i = 0, \ldots, n\,.$$

Nell'intervallo $[a, b]$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\hat{x}_i \qquad i = 0, \ldots, n\,.$$

<u>Esercizio</u>
Scrivere uno script di Matlab che calcoli il polinomio P_n che interpola la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ negli n nodi di Chebyshev dell'intervallo $I = [-5, 5]$ e confronti il grafico di f e di P_n nell'intevallo I.

Soluzione

```
n=input('Grado del polinomio: ');
a=-5; b=5;
x=-cos([0:n]*pi/n);
x=(a+b)/2+(b-a)/2*x;
fx=1./(x.^2+1);
p=polyfit(x,fx,n);
xx=linspace(a,b);
pxx=polyval(p,xx);
fxx=1./(xx.^2+1);
plot(xx,fxx,xx,pxx,x,fx,'* ');
legend('1/(x^2+1)','Polinomio interpolatore','Dati');
```

Splines

Se `x` e `y` sono due vettori di uguale lungheza

```
>> yy = spline(x,y,xx)
```

calcola il valore in `xx` della spline cubica "not-a-knot" che interpola i dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$.

<u>Esercizio</u>

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	0	0.5	1.6	2.9	3.4	4.8	5.2	5.7	6.0
y_i	2.20	2.13	3.32	5.21	5.10	7.05	7.00	8.00	8.25

disegnare il grafico della retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati, del polinomio interpolatore e della spline cubica interpolatoria "not-a-knot".

Soluzione

```
>> x=[0 0.5 1.6 2.9 3.4 4.8 5.2 5.7 6.0];

>> y=[2.20 2.13 3.32 5.21 5.10 7.05 7.0 8.0 8.25];

>> p=polyfit(x,y,length(x)-1);

>> r=polyfit(x,y,1);

>> xx=linspace(0,6);

>> pp=polyval(p,xx);

>> rxx=polyval(r,xx);

>> ss=spline(x,y,xx);

>> plot(xx,pp,xx,rxx,xx,ss,x,y,'*','LineWidth',2)

>> legend('Lagrange','Minimi quadrati', 'Spline','Dati','Location','SouthEast')
```

Esercizio

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ definita nell'intervallo $I = [-5, 5]$. Scrivere uno script di Matlab per disegnare il grafico di

- la funzione f,
- il polinomio interpolatore di f in N punti equispaziati di I,
- il polinomio interpolatore di f negli N punti di Chebishev di I,
- una funzione spline cubica che interpoli la funzione f in N punti equispaziati di I.

Soluzione

```
N=input('Numero di punti: ');
a=-5; b=5;
n=N-1; % Grado del polinomio interpolatore
h=(b-a)/n;
xeq=[a:h:b]; % Nodi equispaziati
xch=-cos([0:n]*pi/n); % Nodi di Chebishev in [-1,1]
xch=(a+b)/2+(b-a)/2*xch ;% Nodi di Chebishev in [a,b]
f=inline('1./(1+x.^ 2)');
fxeq=feval(f,xeq);  % fxeq=1./(1+xeq.^2)
fxch=feval(f,xch);  % fxch=1./(1+xch.^2)
peq=polyfit(xeq,fxeq,n);
pch=polyfit(xch,fxch,n);
xx=linspace(a,b);
peqxx=polyval(peq,xx);
pchxx=polyval(pch,xx);
sxx=spline(xeq,fxeq,xx);
fxx=feval(f,xx);  % fxx=1./(1+xx.^2)
subplot(2,2,1), plot(xx,fxx,xx,peqxx,xeq,fxeq,'*'), title('Lagrange nodi equispaziati')
subplot(2,2,2), plot(xx,fxx,xx,pchxx,xch,fxch,'*'), title('Lagrange nodi Chebishev')
subplot(2,2,3), plot(xx,fxx,xx,sxx,xeq,fxeq,'*'), title('Spline nodi equispaziati')
```