COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

Calcolo Numerico - 15 giugno 2010

Primo appello [40127] (5 crediti)

Prova MATLAB

Risolvere l'equazione alle derivate ordinarie

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) = t\exp(-y), \qquad t \in [0;10], \tag{1}$$

con la condizione iniziale al tempo $t = 0$

$$y(0) = y_0, \tag{2}$$

applicando il seguente metodo di Runge-Kutta:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(y^n, t^n), \\
k_2 &= f(y^n + \Delta t k_1, t^n + \Delta t), \\
k_3 &= f(y^n + \frac{\Delta t}{2}\left(k_1 + k_2\right), t^n + \Delta t), \\
k_4 &= f(y^n + \frac{\Delta t}{64}\left(14k_1 + 5k_2 - 3k_3\right), t^n + \frac{1}{4}\Delta t), \\
k_5 &= f(y^n + \frac{\Delta t}{96}\left(-12k_1 - 12k_2 + 8k_3 + 64k_4\right), t^n + \frac{1}{2}\Delta t), \\
k_6 &= f(y^n + \frac{\Delta t}{64}\left(-9k_2 + 5k_3 + 16k_4 + 36k_5\right), t^n + \frac{3}{4}\Delta t), \\
y^{n+1} &= y^n + \frac{\Delta t}{90}\left(7k_1 + 7k_3 + 32k_4 + 12k_5 + 32k_6\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

1. Scrivere una funzione MATLAB **func.m** che implementi la funzione $f(y,t)$ dell'equazione (1).
2. Scrivere una funzione MATLAB **RK.m** che risolva il problema (1),(2) con il metodo di Runge-Kutta definito in (3). La funzione riceve come argomenti in ingresso la condizione iniziale y_0, il tempo finale t_{end} e il passo temporale Δt. La funzione ristituisca come risultato $y(t_{end})$, quindi il valore della funzione y al tempo finale t_{end}.
3. La soluzione esatta del problema (1),(2) è

$$y(t) = \ln\left(\frac{1}{2}t^2 + \exp(y_0)\right) \tag{4}$$

Scrivere una funzione MATLAB **exact.m** che implementi la soluzione esatta (4). La funzione riceve t e y_0 come argomenti e da $y(t)$ come risultato.