CALCOLO 1		18 giugno 2007
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

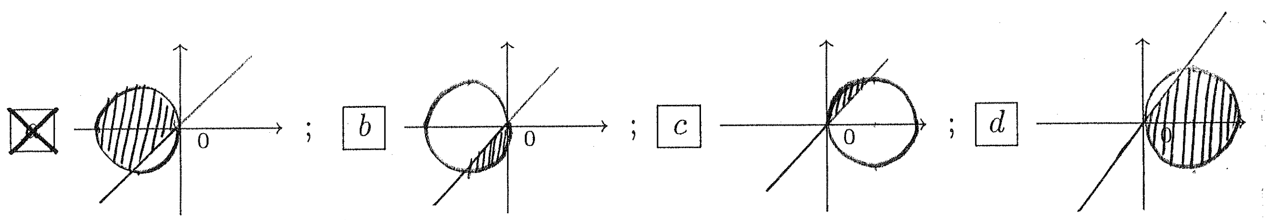
1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n2^{-n} - 3\sin\frac{1}{n} + 2n^2}{2-n^2} =$ $\boxed{a}$ $-\infty$; $\boxed{b}$ $+\infty$; $\boxed{c}$ 0; $\boxtimes$ -2.

2. Per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ si ha che $f(x) = \begin{cases} e^{-x} + \beta x & \text{per } x < 0 \\ \alpha\cos x - x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ è continua e derivabile in $x_0 = 0$? $\boxed{a}$ $\alpha = -1$, $\beta = 2$; $\boxtimes$ $\alpha = 1$, $\beta = 0$; $\boxed{c}$ $\alpha = 1$, $\beta = -1$; $\boxed{d}$ $\alpha = -1$, $\beta = 0$.

3. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+2)e^{\frac{1}{n}}}{1+2n^{\alpha}}$ è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $\alpha < 1$; $\boxtimes$ $\alpha > 3$; $\boxed{c}$ $\alpha < 3$; $\boxed{d}$ $\alpha > 4$.

4. Sia f una funzione derivabile in $[0,1]$ tale che $f(1) = 2$. Se $f'(x) > -1$ per ogni $x \in [0,1]$ allora è sempre vero che: $\boxtimes$ $f(0) < 3$; $\boxed{b}$ $f(0) > 3$; $\boxed{c}$ $\exists c \in (0,1)$ tale che $f(c) < 1$; $\boxed{d}$ $\forall c \in (0,1)$ si ha $f(c) > 2$.

5. L'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbf{C}$ tali che $|z+1| < 1$ e $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ è la regione tratteggiata:



6. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della funzione $f(x) = e^{x\cos x} - x^2$ è: $\boxed{a}$ $1 + 2x^2$; $\boxed{b}$ $1 - 3x^2$; $\boxtimes$ $1 + x - \frac{1}{2}x^2$; $\boxed{d}$ $1 - x + \frac{5}{2}x^2$.

7. Siano $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$ e $g(y) = 3y^2 - y$. Allora la retta tangente al grafico della funzione composta $(g \circ f)(x)$ nel punto $x_0 = 1$ vale: $\boxtimes$ $y = -14x + 18$; $\boxed{b}$ $y = 10x - 14$; $\boxed{c}$ $y = 22x - 37$; $\boxed{d}$ $y = 27x - 29$.

8. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua, tale che $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 6$. Allora esiste $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che: $\boxtimes$ $f(x_0) = 2$; $\boxed{b}$ $f(x_0) = 1$; $\boxed{c}$ $f(x_0) = \frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $f(x_0) = \frac{3}{2}$.

CALCOLO I	18 giugno 2007

2. **(6 punti)**
Si calcoli l'integrale
$$\int_1^{16} \frac{1}{x^{3/4}+4x^{1/2}+3x^{1/4}}\,dx\ .$$

Siccome $x^{1/2}=(x^{1/4})^2$ e $x^{3/4}=(x^{1/4})^3$, "viene voglia" di cambiare variabile con $t=x^{1/4}$. Dunque $x=t^4$, $dx=4t^3\,dt$, e per $x=1$ si ha $t=1$, per $x=16$ si ha $t=2$.

Quindi:
$$I=\int_1^{16}\frac{1}{x^{3/4}+4x^{1/2}+3x^{1/4}}\,dx=\int_1^2\frac{4t^3}{t^3+4t^2+3t}\,dt=\int_1^2\frac{4t^2}{t^2+4t+3}\,dt=$$
$$=4\int_1^2\frac{t^2+4t+3-4t-3}{t^2+4t+3}\,dt=4\int_1^2 1\,dt-4\int_1^2\frac{4t+3}{t^2+4t+3}\,dt.$$

Le radici di t^2+4t+3 sono
$$t_{1,2}=-2\mp\sqrt{4-3}=-2\mp1=\begin{cases}-3\\-1\end{cases}.$$

Dunque bisogna trovare A e B tali che
$$\frac{4t+3}{t^2+4t+3}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+3}=\frac{At+3A+Bt+B}{(t+1)(t+3)}=\frac{(A+B)t+3A+B}{(t+1)(t+3)}.$$

Si ha
$$\begin{cases}A+B=4\\3A+B=3\end{cases}\to\begin{cases}B=4-A\\3A+4-A=3\end{cases}\to\begin{cases}B=4+1/2=9/2\\2A=-1\ ,\ A=-1/2\end{cases}.$$

Dunque
$$I=4-4\int_1^2\frac{9/2}{t+3}\,dt+4\int_1^2\frac{+1/2}{t+1}=4-18\log|t+3|\Big|_1^2+2\log|t+1|\Big|_1^2=$$
$$=4-18\log5+18\log4+2\log3-2\log2=4-18\log5+34\log2+2\log3.$$

CALCOLO I	18 giugno 2007

1. (6 punti)
Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - \sin(x^2)}{x + 2x^2 - \log(1+x)}.$$

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor (di centro $x_0 = 0$):

$$\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^3) \quad ; \quad \cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2) \quad ; \quad \log(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2).$$

Dunque

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2).$$

Inserendo nell'espressione assegnata:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - \sin(x^2)}{x + 2x^2 - \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2/2 + o(x^2) - 1 - x^2 + o(x^2)}{x + 2x^2 - x + x^2/2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3/2\, x^2 + o(x^2)}{5/2\, x^2 + o(x^2)} = -3/5.$$

[Se si vuole usare la regola di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - \sin(x^2)}{x + 2x^2 - \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - 2x\cos(x^2)}{1 + 4x - 1/_{1+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 4x^2 \operatorname{sen}(x^2) - 2\cos(x^2)}{4 + \frac{1}{(1+x)^2}} = -\frac{3}{5}. \;]$$

CALCOLO I	18 giugno 2007

3. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2+x}{2e^{2y}+6e^y} \\ y(0) = 0 \,. \end{cases}$$

È un'equazione non-lineare, del 1° ordine, a variabili separabili.
Dunque ho

$$\int (2e^{2y}+6e^y)\,dy = \int (x^2+x)\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c\,.$$

$$\int (2e^{2y}+6e^y)\,dy = e^{2y}+6e^y$$

Imponendo il dato di Cauchy:

$$1+6 = c\,, \quad c=7\,.$$

Così:

$$e^{2y}+6e^y-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-7=0\,.$$

Siccome $e^{2y}=(e^y)^2$, "viene voglia" di porre $t=e^y$ e dunque risolvere, per ogni x fissato:

$$t^2+6t-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-7=0\,, \quad t_{1/2} = -3\mp\sqrt{9+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7}\,.$$

Dunque

$$e^y = -3\mp\sqrt{9+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7}\,.$$

Ma il segno $-$ della radice non va bene ($e^y>0$, e comunque si vuole soddisfare il dato di Cauchy, che qui dà $1=-3\mp\sqrt{16}=-3\mp4\ldots$)

In conclusione

$$y(x) = \log\left(-3+\sqrt{16+x^3/3+x^2/2}\right).$$