Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in matematica
A.A. 2010/2011
14 febbraio 2012

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ il 3–spazio proiettivo reale numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Definiamo i punti A, B, C e D di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ponendo

$$A := [1, 0, -2, 3], \quad B := [-1, 1, 1, 0], \quad C := [-1, 2, 0, 3] \ \text{ e } \ D := [0, 1, 1, 1].$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si dimostri che i punti A, B e C sono allineati e si calcoli un sistema di equazioni cartesiane per la retta proiettiva di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per tali punti.

(2) Si dimostri che il punto D non è allineato con A, B e C e si calcoli un'equazione cartesiana del piano proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per A, B, C e D.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y). Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{E}^2$ ponendo

$$\mathcal{C} : \ 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 6x - 2y + 2 = 0.$$

Si risponda ai seguenti questiti:

(1) Si calcoli la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$.

(2) Si determini l'isometria diretta $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di $\mathbb{E}^2$ tale che $\mathcal{C} = T^{-1}(\mathcal{D})$ e si calcolino gli eventuali assi di simmetria di $\mathcal{C}$.

Esercizio 3. Sia X un insieme infinito e sia τ la topologia cofinita su X, ossia

$$\tau = \{X, \emptyset\} \cup \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ è finito }\}.$$

(1) Si provi che (X, τ) è compatto e connesso.

(2) Si provi che un'applicazione $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ non costante è continua se e solo se per ogni $x \in X$, l'insieme $f^{-1}(x)$ è finito.

(3) È vero che un sottospazio compatto di (X, τ) è necessariamente chiuso in X? (Si trovi una dimostrazione o si esibisca un controesempio).

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quali tra i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tra loro omeomorfi e quali no.

$$\begin{aligned} H &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 8y^2 - 4 = 0\} \\ K &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2 + y = 0\} \\ L &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^2 = 0\} \end{aligned}$$

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Dobbiamo verificare che $\mathrm{rk}(M) = 2$, dove

$$M := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -2 & 3 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

$$\det M(1,2|1,2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Inoltre, vale

$$\det M(1,2,3|1,2,3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

e

$$\det M(1,2,3|1,2,4) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Dal principio dei minori orlati, segue che $\mathrm{rk}(M) = 2$ e quindi A, B e C sono allineati.

Calcoliamo un sistema di equazioni cartesiane per la retta r passante da A e B (e quindi da C):

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -2 & 3 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

se e soltanto se

$$\begin{cases} 0 = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2x_0 + x_1 + x_2 \\ \\ 0 = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -3x_0 - 3x_1 + x_3 \end{cases}$$

Dunque, si ha:

$$r: \begin{cases} 2x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_0 - 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

2. Dobbiamo provare che $\mathrm{rk}(N) = 3$, dove

$$N := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -2 & 3 \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vale

$$\det N(1,2|1,2) = 1 \neq 0,$$

$$\det N(1,2,3|1,2,3) \neq 0.$$

Dunque $\mathrm{rk}(N) = 3$ e quindi A, B e D non sono allineati.

Calcoliamo ora un'equazione cartesiana del piano proiettivo π di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per A, B o D.

<u>*1° modo*</u>:

Vale:

$$\pi: \ 0 = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2(x_0 + 2x_1 - x_2 - x_3),$$

ovvero

$$\pi: \ x_0 + 2x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

<u>*2° modo*</u>:

Consideriamo il fascio di piani proiettivi di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenenti r:

$$\lambda(2x_0 + x_1 + x_2) + \mu(3x_0 + 3x_1 - x_3) = 0 \qquad \text{con } (\lambda, \mu) \neq (0,0).$$

Imponiamo il passaggio da D:

$$2\lambda + 2\mu = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = -\mu.$$

Scegliamo $\mu = 1$ e $\lambda = -1$, ottenendo

$$\pi: \ x_0 + 2x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Esercizio 2.

1. La matrice associata a $\mathcal{C}$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Denotiamo con A_0 la sottomatrice $A(2,3|2,3)$ di A, cioè

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vale:

$$\det A = -8 \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \det A_0 = 8 > 0.$$

La conica $\mathcal{C}$ è quindi un'ellisse non degenere.

Calcoliamo la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$.

Dal teorema di classificazione delle coniche euclidee, esistono $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $M \in SO(2)$ e $c \in \mathbb{R}^2$ tali che, ponendo

$$\widetilde{M} := \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ c & & M \\ & & \end{array}\right)$$

si ha:

$$\widetilde{M}^t A \widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|cc} \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{array}\right) \qquad \text{ed, in particolare,} \qquad M^{-1} A_0 M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Segue che:

- $-8 = \det A = \det \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma$, in quanto $\det \widetilde{M} = 1$;
- $8 = \det A_0 = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \alpha\beta$;
- $6 = \mathrm{tr} A_0 = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \alpha + \beta$.

Dunque, si ha:

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = -8 \\ \alpha\beta = 8 \\ \alpha + \beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -1 \\ \alpha\beta = 8 \\ \alpha + \beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \\ \gamma = -1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Segue che la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ è data dall'equazione

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2x^2 + 4y^2 = 1.$$

2. Calcoliamo l'isometria diretta $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ in modo che $\mathcal{C} = T^{-1}(\mathcal{D})$.

   Calcoliamo una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ diagonale per A_0 e concordemente orientata con quella canonica di $\mathbb{R}^2$. Il polinomio caratterisctico $p(\lambda)$ di A_0 è dato da:

$$p(\lambda) := \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4).$$

   Dunque gli autovalori di A_0 sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.

   L'autospazio V_1 di A_0 relativo a λ_1 è uguale a $\langle(-1, 1)^t\rangle$, mentre l'autospazio V_2 di A_0 relativo a λ_2 è uguale a $\langle(1, 1)^t\rangle$.

   Poniamo

$$v_1 := \frac{(-1,1)^t}{||(1,1)||} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t,$$

$$v_2 := \frac{(1,1)^t}{||(1,1)||} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t.$$

   Poiché

$$\det \begin{pmatrix} v_2 & v_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

   $\mathfrak{B} := (v_2, v_1)$ è la base di $\mathbb{R}^2$ cercata.

   Definiamo la matrice $M \in SO(2)$ ponendo:

$$M := \begin{pmatrix} v_2 & v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

   Definiamo anche la rotazione $T_1 : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ indotta da M:

$$T_1((x_1, y_1)^t) = M(x_1, y_1)^t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)^t.$$

Vale:

$$\begin{aligned}
(T_1)^{-1}(\mathcal{C}) :\ 0 &= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)^2 + \\
&\quad + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right) + \\
&\quad - 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right) + 2 = \\
&= 4\left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1.
\end{aligned}$$

Definiamo l'isometria diretta $T_2 : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ ponendo

$$T_2((x_1, y_1)^t) = \left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^t = \left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2},\ -x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t.$$

Evidentemente, $\mathcal{D} = T_2((T_1)^{-1}(\mathcal{C}))$, ovvero $\mathcal{C} = (T_2 \circ (T_1)^{-1})^{-1}(\mathcal{D})$.
Poiché

$$\begin{aligned}
(T_1)^{-1}((x, y)^t) &= M^{-1}(x, y)^t = M^t(x, y)^t = \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^t,
\end{aligned}$$

vale:

$$T((x, y)^t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t$$

Poiché gli assi di simmetria di $\mathcal{D}$ sono dati dalle equazioni $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$, le equazioni degli assi di simmetria di $\mathcal{C}$ sono:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad \text{e} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

ovvero

$$x - y - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad x + y - 1 = 0.$$

Esercizio 3.

1. (X, τ) è connesso, perché due aperti non vuoti hanno sempre intersezione non vuota. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X. Prendiamo un aperto $U \in \mathcal{U}$ e sia $X \setminus U := \{x_1, ..., x_r\}$. Poiché $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di X, esisteranno aperti $U_j \in \mathcal{U}$ tali che $x_j \in U_j$ con $j = 1, ..., r$. Dunque $\{U, U_j\}$ con $j = 1, ..., r$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. Quindi (X, τ) è compatto.

2. Supponiamo $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ sia non costante e continua. Poiché $x \in X$ è un chiuso, $f^{-1}(x)$ è un chiuso (potrebbe anche essere vuoto). Dunque, per definizione di chiuso e poiché f non è costante, $f^{-1}(x)$ è finito.

   Supponiamo ora che per ogni $x \in X$, l'insieme $f^{-1}(x)$ sia finito (in particolare f non è costante). Sia $C = \{x_1, ..., x_r\}$ un chiuso; allora $f^{-1}(C) = \cup_i f^{-1}(x_i)$ è finito e quindi è un chiuso. Dunque f è continua.

3. Un qualunque sottoinsieme infinito di (X, τ) è compatto, ma non è chiuso.

Esercizio 4. H e K non sono omeomorfi, perché H è compatto e K non lo è. In particolare sono entrambi chiusi, ma H è limitato (se $(x, y) \in H$ allora $x^2+y^2 \leq x^2+8y^2 = 4$) mentre K non lo è (K è una retta).

K ed L sono omeomorfi: la proiezione $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $\pi(x, y) = y$, ristretta ad L fornisce un omeomorfismo tra L e la retta $x = 0$. Due rette in $\mathbb{R}^2$ sono sempre tra loro omeomorfe.