Esame scritto di Geometria 2

6 febbraio 2014

Esercizio 1. *Sia $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ lo spazio proiettivo reale di dimensione 4 dotato del riferimento proiettivo standard $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Siano r_1, r_2, r_3 le rette di equazioni*

$$r_1 : \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x_0 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad r_3 : \begin{cases} x_0 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

1. *Si determini l'equazione cartesiana dell'iperpiano π contenente r_1 ed r_2.*
2. *Si calcoli il punto di intersezione P fra π ed r_3 e si determini il piano τ contenente P ed r_2.*
3. *Si calcoli il punto di intersezione Q fra τ ed r_1 e si definisca s come la retta passante per P e Q. Si scrivano equazioni cartesiane per s e si mostri che $s \cap r_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2, 3$.*

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo reale dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y) e sia $\mathcal{C}(k)$ la conica definita come*

$$\mathcal{C}(k) : 5x^2 + (k^2 + 1)y^2 + 2(2k - 1)xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

1. *Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini il tipo affine della conica $\mathcal{C}(k)$.*
2. *Sia $\mathcal{C} = \mathcal{C}(-2)$. Si calcoli la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$, determinando un'isometria diretta $S : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.*

Esercizio 3. *Sia $\mathbb{R}^2$ lo spazio euclideo. Si consideri la relazione di equivalenza*

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ se e solo se } x_1^2 = x_2^2.$$

Sia $X = \mathbb{R}^2 / \sim$ lo spazio quoziente.

1. *Si dica se X è connesso, compatto, di Hausdorff.*
2. *Si dica se X è omeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Esercizio 4. *Determinare se i seguenti sottoinsiemi del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ sono connessi oppure no.*

1. *L'insieme X dei punti con entrambe le coordinate razionali.*
2. *L'insieme Y dei punti con almeno una coordinata razionale.*
3. *L'insieme Z dei punti le cui coordinate sono o entrambe razionali o entrambe irrazionali.*

Soluzioni

Soluzione esercizio 1.

1. Scegliendo due punti convenienti su r_1 e due punti su r_2 l'iperpiano π si trova calcolando

$$\pi: \quad \det \begin{array}{c} \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = 2x_0 - 2x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

2. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x_0 - 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_0 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

si ottiene $P = [-1, 1, 1, -5, 1]$. Possiamo ricavare le equazioni di τ dai minori 4×4 della matrice

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

cioè

$$\tau: \begin{cases} 6x_1 + -x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

3. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

abbiamo $Q = [1, 1, 3, -3, 0]$. Dai minori 3×3 della matrice

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$s : \begin{cases} x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_0 - x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Chiaramente $s \cap r_1 = Q$, $s \cap r_3 = P$, mentre

$$s \cap r_2 : \begin{cases} x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_0 - x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

da cui $s \cap r_2 = [2, 0, 2, 2, -1]$.

$\square$

Soluzione esercizio 2.

1. Siano

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 2k-1 \\ -1 & 2k-1 & k^2+1 \end{pmatrix} \qquad A_0(k) = \begin{pmatrix} 5 & 2k-1 \\ 2k-1 & k^2+1 \end{pmatrix}$$

le matrici associate a $\mathcal{C}(k)$.

Abbiamo $\det A(k) = 8k - 4$, $\det A_0(k) = (k+2)^2$ e $\mathrm{Tr} A_0(k) = k^2 + 6$.

Se $k = -2$, allora $\det A_0(-2) = 0$ e quindi $\mathcal{C}(-2)$ è una parabola non degenere.

Se $k \neq -2$, allora $\det A_0(k) > 0$ e quindi $\mathcal{C}(k)$ è un'ellisse non degenere se $k \neq 1/2$, a punti reali se $k < 1/2$, non reali se $k > 1/2$, degenere se $k = 1/2$.

2. Per trovare l'isometria cercata partiamo calcolando una rotazione R che ci consenta di avere gli assi di $\mathcal{C}$ paralleli agli assi coordinati. Questo corrisponde a trovare una base ortonormale di $\mathbb{E}^2$ che diagonalizza A_0. Siccome stiamo considerando il caso $k = -2$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo quindi gli autovalori di A_0. Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -5 \\ -5 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2 - 25 = \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10),$$

da cui $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 0$.

I corrispondenti autovettori normalizzati sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e la matrice della rotazione R è

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siano (x_1, x_2) le nuove coordinate rispetto alla base (v_1, v_2). Allora abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ -x_1 + y_1 \end{pmatrix}$$

da cui, ponendo $\mathcal{C}_1 = R^{-1}(C)$, otteniamo che $\mathcal{C}_1$ ha equazione

$$\begin{aligned} &\frac{5}{2}(x_1+y_1)^2 + \frac{5}{2}(-x_1+y_1)^2 - 5(x_1+y_1)(-x_1+y_1) - \sqrt{2}(x_1+y_1) \\ &\quad - \sqrt{2}(-x_1+y_1) + 1 \\ &= 10x_1^2 - 2\sqrt{2}y_1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

La matrice associata alla trasformazione R^{-1} è

$$M^{-1} = M^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo ora traslare il vertice della parabola nell'origine, tramite il metodo del completamento dei quadrati.

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : \ & 10x_1^2 - 2\sqrt{2}y_1 + 1 \\ &= 10x_1^2 - 2\sqrt{2}\left(y_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0, \end{aligned}$$

da cui otteniamo la traslazione

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

e infine la forma canonica

$$D = T(\mathcal{C}_1) : \quad y_2 - \frac{5}{\sqrt{2}} x_2^2 = 0.$$

Abbiamo $S = T \circ R^{-1}$ e quindi

$$\begin{aligned} S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y - \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Soluzione esercizio 3. 1. Dimostriamo che $X \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la mappa data da $(x, y) \mapsto x^2$. Chiaramente f è continua.

Dimostriamo che è anche aperta. Sia $B = B(v, r) \subset \mathbb{R}^2$ una palla aperta di centro $v = (x, y) \in \mathbb{R}$ e raggio r e siano $m = \min\{|x-r|, |x+r|\}$ e $M = \max\{|x-r|, |x+r|\}$. Allora $f(B) = [0, M^2)$ se $(0, 0) \in B$ e $f(B) = (m^2, M^2)$ se $(0, 0) \in B$.

Infine f è chiaramente suriettiva e quindi $X \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da qui segue che X è connesso, di Hausdorff e non compatto.

2. $X \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}$. Infatti $\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\}$ è connesso, mentre togliendo un qualsiasi punto di $\mathbb{R}$ si ottiene uno spazio disconnesso.

□

Soluzione esercizio 4. 1. L'insieme X è sconnesso, infatti $U_1 = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < \sqrt{2}\}$ e $U_2 = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \sqrt{2}\}$ sono due aperti disgiunti di X tali che $U_1 \cup U_2 = X$.

2. L'insieme Y è connesso, esso è infatti connesso per archi: dati due punti $p = (x_1, y_1)$ e $q = (x_2, y_2)$ in Y possiamo sempre trovare una linea connessa composta da al massimo tre segmenti che congiunge p e q.

   Ad esempio, se x_1 e x_2 sono razionali e $y_1 < y_2$, sia $z \in \mathbb{Q}$ tale che $y_1 < z < y_2$. Allora possiamo considerare la linea composta dal segmento verticale che congiunge p con (x_1, z), dal segmento orizzontale che congiunge (x_1, z) con (x_2, z) e dal segmento verticale che congiunge (x_2, z) con q.

   Se x_1, y_2 sono razionali allora possiamo considerare il segmento verticale che congiunge p con (x_1, y_2) e poi il segmento orizzontale che congiunge (x_1, y_2) con q.

   Tutti gli altri possibili casi sono analoghi.

3. Dimostriamo che Z è connesso. Sia W il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ dato dall'unione delle rette del tipo $y = kx$ con k razionale. Tale insieme è connesso in quanto ogni retta è connessa e tutte le rette hanno un punto in comune (l'origine di $\mathbb{R}^2$). Chiaramente $W \subset Z$ e la chiusura di W è tutto $\mathbb{R}^2$, da cui segue che Z è connesso.

$\square$