Geometria affine e proiettiva

Laura Facchini

7 aprile 2011

Esercizio 1. *Sia $\mathbb{E}^4$ il 4-spazio euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z, w).*

Siano $P(0,0,-1,-1)$, $P_1(1,-2,-1,1)$, $P_2(2,-4,-1,3)$ e $P_3(-1,2,-1,-3)$ punti di $\mathbb{E}^4$ e sia S_1 il sottospazio affine di $\mathbb{E}^4$ generato da P_1, P_2, P_3 e P.

Siano poi $Q(0,1,1,-1)$, $Q_1(1,-2,0,-4)$ e $Q_2(1,-1,1,1)$ punti di $\mathbb{E}^4$ e sia S_2 il sottospazio affine di $\mathbb{E}^4$ generato da Q_1, Q_2 e Q.

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) *Si dimostri che i punti P_1, P_2, P_3, P sono allineati e si calcoli un sistema di equazioni cartesiane per S_1.*

(2) *Si calcoli la dimensione di S_2 e si trovi un sistema di equazioni cartesiane per S_2.*

(3) *Si mostri che S_1 ed S_2 sono paralleli.*

(4) *Si calcoli la distanza tra S_1 ed S_2.*

Svolgimento.

1. Denotiamo con $M_1 \in \mathcal{M}(3 \times 4; \mathbb{R})$ la matrice che ha per righe i vettori $\overrightarrow{PP_i}$ per $i \in \{1,2,3\}$:

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1-0 & -2-0 & -1-(-1) & 1-(-1) \\ 2-0 & -4-0 & -1-(-1) & 3-(-1) \\ -1-0 & 2-0 & -1-(-1) & -3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che tale matrice ha rango 1, ovvero i quattro punti sono allineati e quindi S_1 è una retta affine di $\mathbb{E}^4$

Per trovare delle equazioni cartesiane per S_1, basta imporre che

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} \overrightarrow{PX} \\ \overrightarrow{PP_1} \end{pmatrix} = 1,$$

ove X è il punto generico di coordinate (x, y, z). In altre parole, si ha

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x-0 & y-0 & z-(-1) & w-(-1) \\ 1-0 & -2-0 & -1-(-1) & 1-(-1) \end{pmatrix} = 1,$$

ovvero

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x & y & z+1 & w+1 \\ \mathbf{1} & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

Grazie al principio dei minori orlati, ciò è equivalente a porre:

$$\begin{cases} 0 = \det\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -2x - y \\ \\ 0 = \det\begin{pmatrix} x & z+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -z - 1 \\ \\ 0 = \det\begin{pmatrix} x & w+1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2x - w - 1 \end{cases}$$

Dunque, si ha:

$$S_1 : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z + 1 = 0 \\ 2x - w - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Denotiamo con $M_2 \in \mathcal{M}(2 \times 4; \mathbb{R})$ la matrice che ha per righe i vettori $\overrightarrow{QQ_i}$ per $i \in \{1, 2\}$:

$$M_2 := \begin{pmatrix} 1-0 & -2-1 & 0-1 & -4-(-1) \\ 1-0 & -1-1 & 1-1 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che tale matrice ha rango 2, ovvero $\dim S_2 = 2$ e quindi S_2 è un 2-piano affine di $\mathbb{E}^4$.

Per trovare delle equazioni cartesiane per S_2, basta imporre che

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x-0 & y-1 & z-1 & w-(-1) \\ 1-0 & -2-1 & 0-1 & -4-(-1) \\ 1-0 & -1-1 & 1-1 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} \overrightarrow{QX} \\ \overrightarrow{QQ_1} \\ \overrightarrow{QQ_2} \end{pmatrix} = 2.$$

Osserviamo che la sottomatrice $M_2(2, 3|1, 3)$ di M_2 è uguale a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il suo determinante è uguale a $1 \neq 0$. Portiamo "in testa" tale sottomatrice di M_2 scambiando tra di loro la seconda e la terza colonna di M_2 stessa. Otteniamo la sequente matrice

$$M_2' := \begin{pmatrix} x & z-1 & y-1 & w+1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & -3 & -3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dal principio dei minori orlati segue che

$$\text{rk}M_2 = \text{rk}M_2' = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = \det\begin{pmatrix} x & z-1 & y-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2x + y - z \\ \\ 0 = \det\begin{pmatrix} x & z-1 & w+1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2x - 5z + w + 6 \end{cases}$$

Dunque, si ha:

$$S_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -2x - 5z + w + 6 = 0 \end{cases}$$

3. Un vettore direzione di S_1 è dato da $\overrightarrow{PP_1} = (1, -2, 0, 2)^t$. La giacitura $G(S_2)$ di S_2 ha equazioni cartesiane

$$G(S_2) : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -2x - 5z + w = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le componenti di $\overrightarrow{PP_1}$ in queste ultime equazioni, si verifica immediatamente che $\overrightarrow{PP_1} \in G(S_2)$:

$$\begin{cases} 2 - 2 - 0 = 0 \\ -2 - 0 + 2 = 0 \end{cases}$$

Segue che S_1 è parallelo a S_2.

4. Ricordiamo che $P(0, 0, -1, -1) \in S_1$ e $Q(0, 1, 1, -1) \in S_2$.

   Calcoliamo la giacitura $G(S_2)$ del 2-piano S_2:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -2x + 5y - w = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 2x + y \\ w = -2x + 5y \end{cases}$$

$Sol = \{(x, y, 2x + y, -2x + 5y)^t \in \mathbb{R}^4 | y, w \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 2, -2)^t, (0, 1, 1, 5)^t \rangle$.

Poniamo $v_1 := (1,0,2,-2)^t$ e $v_2 := (0,1,1,5)^t$. Segue che (v_1, v_2) è una base di $G(S_2)$. Se denotiamo con X la proiezione ortogonale di P su S_2, vale:

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{PX}, v_1 \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{PX}, v_2 \rangle = 0 \end{cases}, \qquad \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QP}$$

e

$$\overrightarrow{QP} = (0,0,-1,-1) - (0,1,1,-1) = (0,-1,-2,0).$$

Poiché $X \in S_2$, esistono (unici) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\overrightarrow{QX} = \lambda v_1 + \mu v_2$. Vale:

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QP}, v_1 \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QP}, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \overrightarrow{QX}, v_1 \rangle = \langle \overrightarrow{QP}, v_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{QX}, v_2 \rangle = \langle \overrightarrow{QP}, v_2 \rangle \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \langle \lambda v_1 + \mu v_2, v_1 \rangle = \langle \overrightarrow{QP}, v_1 \rangle \\ \langle \lambda v_1 + \mu v_2, v_2 \rangle = \langle \overrightarrow{QP}, v_2 \rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \langle v_1, v_1 \rangle + \mu \langle v_2, v_1 \rangle = \langle \overrightarrow{QP}, v_1 \rangle \\ \lambda \langle v_1, v_2 \rangle + \mu \langle v_2, v_2 \rangle = \langle \overrightarrow{QP}, v_2 \rangle \end{cases}$$

D'altra parte, si ha

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= 1+4+4 = 9 \\ \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle &= 2 - 10 = -8 \\ \langle v_2, v_2 \rangle &= 1+1+25 = 27 \\ \langle \overrightarrow{QP}, v_1 \rangle &= -4 \\ \langle \overrightarrow{QP}, v_2 \rangle &= -3 \end{aligned}$$

Dunque, vale:

$$\begin{cases} 9\lambda - 8\mu = -4 \\ -8\lambda + 27\mu = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{132}{179} \\ \\ \mu = -\dfrac{59}{179} \end{cases}$$

Segue che

$$\overrightarrow{QX} = \lambda v_1 + \mu v_2 = -\frac{132}{179}(1,0,2,-2) - \frac{59}{179}(0,1,1,5) = -\frac{1}{179}(132, 59, 323, 31)$$

e la distanza tra S_1 ed S_2 è uguale a

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{PX}|| &= ||\overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QP}|| = \\
&= \left|\left| -\frac{1}{179}(132, 59, 323, 31) - (0, -1, -2, 0) \right|\right| = \\
&= \left|\left| \frac{1}{179}(-132, 120, 35, -31) \right|\right| = \\
&= \sqrt{\frac{(-132)^2 + 120^2 + 35^2 + (-31)^2}{179^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{190}{179}}
\end{aligned}$$

poiché S_1 ed S_2 sono paralleli.

$\square$

Esercizio 2. *Sia* $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ *il* 3*-spazio proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee* $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. *Per ogni* $k \in \mathbb{R}$, *definiamo i seguenti punti di* $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$*:*

$$A(k) := [1, k, 0, 2], \qquad B(k) := [k, 1, 2, 0] \quad e \quad C(k) := [0, k+1, 1, 1].$$

Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ *in modo che i punti* $A(k)$, $B(k)$ *e* $C(k)$ *siano allineati.*

Nel caso in cui essi siano allineati, si calcoli un sistema di equazioni cartesiane per la retta proiettiva $r(k)$ *di* $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ *passante per tali punti.*

Svolgimento. Definiamo la matrice $M(k) \in \mathcal{M}(3 \times 4; \mathbb{R})$ ponendo

$$M(k) := \begin{pmatrix} 1 & k & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ k & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 0 & k+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare per quali valori di k, tale matrice ha rango 2.

Osserviamo che la sottomatrice $M(k)(1, 2|3, 4)$ di $M(k)$ è uguale a

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il suo determinante è uguale a $-4 \neq 0$. Portiamo “in testa” tale sottomatrice di $M(k)$ scambiando tra di loro le prime due colonne con le ultime due di $M(k)$ stessa. Otteniamo la sequente matrice

$$M'(k) := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & 1 & k \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & k & 1 \\ 1 & 1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Dal principio dei minori orlati segue che

$$\mathrm{rk}(M(k)) = \mathrm{rk}(M'(k)) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2(k+1) \\ \\ 0 = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix} = -2(k+1) \end{cases}$$

Dunque $A(k)$, $B(k)$ e $C(k)$ sono allineati se e soltanto se $k = -1$.

Calcoliamo un sistema di equazioni cartesiane per la retta $r(-1)$ passante da $A(-1)$ e $B(-1)$ (e quindi da $C(-1)$):

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ -1 & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = 2$$

se e soltanto se

$$\begin{cases} 0 = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2(2x_0 + x_2 - x_3) \\ \\ 0 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2(2x_1 - x_2 + x_3) \end{cases}$$

Dunque, si ha:

$$r(-1) : \begin{cases} 2x_0 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 3. *Sia $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ il 3-spazio proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo la retta proiettiva $r(k)$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ponendo*

$$r(k) : \begin{cases} x_0 + 2kx_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + kx_2 + (k+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo che la retta $r(k)$ sia contenuta nel piano proiettivo π di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana $x_0 + x_3 = 0$.

Svolgimento. Sia $k \in \mathbb{R}$, definiamo la matrice $A(k) \in \mathcal{M}(3\times 4; \mathbb{R})$ ponendo

$$A(k) := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2k} & -2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & k & k+1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

corrispondente al sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_0 + 2kx_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + kx_2 + (k+1)x_3 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Allora $r(k) \subset \pi := \{x_0 + x_3 = 0\}$ se e soltanto se $\mathrm{rk}(A(k)) = 2$. Dal principio dei minori orlati segue che

$$\mathrm{rk}(A(k)) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2k & -2 \\ 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2(k^2-1) = 2(k-1)(k+1) \\ \\ 0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2k & 1 \\ 0 & -1 & k+1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2k(k+1) \end{cases}$$

Dunque $r(k) \subset \pi$ se e soltanto se $k = -1$. □

Esercizio 4. *Sia $\mathbb{E}^4$ il piano euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y).*

Per ogni $t \in \mathbb{R}$, definiamo la conica $\mathcal{C}(t)$ di $\mathbb{E}^2$ ponendo

$$\mathcal{C}(t): \; tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) *Si stabilisca se esistono valori di t per cui la conica $\mathcal{C}(t)$ è degenere.*

(2) *Si determini il tipo (parabola, ellisse, iperbole) della conica $\mathcal{C}(t)$ al variare del parametro t in $\mathbb{R}$.*

(3) *Si scriva la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}(-1)$.*

Svolgimento. La matrice $A(t)$ associata alla conica è

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & t & 1 \\ -1 & 1 & t+2 \end{pmatrix}$$

1. La conica $\mathcal{C}(t)$ è degenere se e soltanto se $\det A(t) = 0$. Osserviamo che nel nostro caso $\det A(t) = -t$, quindi la conica è degenere per $t = 0$.

2. Per determinare il tipo di conica, occorre considerare il determinante della sottomatrice $A_0(t) := A(t)(2,3|2,3)$ di $A(t)$, ovvero di

$$A_0(t) := \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t+2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che

$$\det A_0(t) = t^2 + 2t - 1,$$

quindi:

- $\det A_0(t) = 0$ se $t = -1 \pm \sqrt{2}$ $\quad\rightarrow\quad$ parabola
- $\det A_0(t) > 0$ se $t < -1 - \sqrt{2}$ o $t > -1 + \sqrt{2}$ $\quad\rightarrow\quad$ ellisse
- $\det A_0(t) < 0$ se $-1-\sqrt{2} < t < -1+\sqrt{2}$ con $t \neq 0$ $\quad\rightarrow\quad$ iperbole
- se $t = 0$, allora $\mathcal{C}(t)$ è un'iperbole degenere

$$\mathcal{C}(0) : \; 2xy + 2y^2 - 2y = 0,$$

che si decompone nella seguente coppia di rette reali distinte:

$$y = 0 \qquad \text{e} \qquad x + y - 1 = 0.$$

3. Calcoliamo gli autovalori di $A_0(t)$ per $t = -1$:

$$p_{A_0(t)}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2$$

Quindi gli autovalori di $A_0(t)$ sono $\lambda = \pm\sqrt{2}$ e sono discordi (infatti si tratta di un'iperbole). La conica ha quindi un'equazione del tipo

$$\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + k = 0$$

per un certo $k \in \mathbb{R}$. La matrice C associata alla conica è quindi

$$C := \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Imponendo la condizione $\det C = \det A(t) = -t = 1$, otteniamo $-2k = 1$, quindi l'equazione di $\mathcal{C}(-1)$ è

$$\mathcal{C}(-1) : \; \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 - \frac{1}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}y^2 - 1 = 0.$$

Dunque, la forma canonica di $\mathcal{C}(-1)$ è

$$\mathcal{D}:\ \frac{x^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} - \frac{y^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 1.$$

$\square$

Esercizio 5. *Sia $\mathbb{E}^4$ il piano euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y).*

Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{E}^2$ ponendo

$$\mathcal{C}:\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) *Si determini il tipo (parabola, ellisse, iperbole) della conica $\mathcal{C}$.*

(2) *Si scriva la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$.*

Svolgimento. La matrice A associata a tale equazione è

$$A := \begin{pmatrix} 38 & 8\sqrt{2} & 0 \\ 8\sqrt{2} & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad A_0 := \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Di conseguenza, poiché

$$\det A = 8\sqrt{2}(-40\sqrt{2}) + 38(25 - 9) = -640 + 608 = -32 \neq 0,$$

si tratta di una conica non degenere.

Calcoliamo gli autovalori di A_0:

$$p_{A_0}(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I_2) = (5 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16 = (\lambda - 8) \cdot (\lambda - 2),$$

quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$. Poiché essi sono concordi, si tratta di un'<u>ellisse</u>.

2. Sappiamo dunque che la forma canonica sarà del tipo $2x^2 + 8y^2 + t = 0$ per un certo $t \in \mathbb{R}$, a cui è associata la matrice diagonale

$$D := \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det A$ è un invariante, quindi $\det A = \det D$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-32 = 16t \qquad \Rightarrow \qquad t = -2$$

ricavando la forma canonica della nostra conica

$$2x^2 + 8y^2 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 4y^2 - 1 = 0.$$

Dunque, la forma canonica di $\mathcal{C}$ è

$$\mathcal{D}: \ \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

$\square$

Esercizio 6. *Sia $\mathbb{E}^4$ il piano euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y).*

Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{E}^2$ ponendo

$$\mathcal{C}: \ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) *Si determini il tipo (parabola, ellisse, iperbole) della conica $\mathcal{C}$.*

(2) *Si scriva la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$.*

Svolgimento. La matrice A associata a tale equazione è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Di conseguenza, poiché

$$\det A = -3 \cdot 12 = -36 \neq 0,$$

si tratta di una conica non degenere.

Calcoliamo gli autovalori di A_0:

$$p_{A_0}(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I_2) = (1 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) - 4 = \lambda(\lambda - 5),$$

quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$ e quindi si tratta di una <u>parabola</u>.

2. Sappiamo dunque che la forma canonica sarà del tipo $5y^2 - 2tx = 0$ per un certo $t \geq 0$, a cui è associata la matrice

$$C := \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det A$ è un invariante, quindi $\det A = \det C$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-36 = -5t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t^2 = \frac{36}{5} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{6}{\sqrt{5}} \geq 0$$

ricavando la forma canonica della nostra conica

$$5y^2 - 2\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}}x = 0.$$

Dunque, la forma canonica di $\mathcal{C}$ è

$$\mathcal{D}: \ y^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}}x = 0.$$

$\square$