Esercizi per Geometria II
Geometria euclidea e proiettiva

Filippo F. Favale

8 aprile 2014

Esercizio 1
Si consideri $\mathbb{E}^2$ dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y) e origine O. Si consideri, al variare del parametro k, la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione

$$x^2 + ky^2 - 4xy - 2x = -1.$$

- Si dica per quali valori di k, $\mathcal{C}_k$ è non degenere.
- Per questi valori, si classifichi $\mathcal{C}_k$ da un punto di vista affine.
- Dopo avere dimostrato che $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1$ ha centro, ricavare il centro e scrivere un'isometria diretta S che riduce $\mathcal{C}$ a forma canonica.

Esercizio 2
Sia $\mathbb{P}^3$ lo spazio proiettivo reale dotato del riferimento proiettivo di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si considerino i punti

$$P : [0, 1, 0, 0] \qquad Q : [0, 1, 1, 1]$$

e il sottospazio proiettivo s descritto dalle relazioni $x_2 + x_0 = x_0 + x_1 + x_3 = 0$.

- Si ricavi la dimensione di s e si scrivano delle equazioni cartesiane per la retta r contenente P e Q.
- Si dimostri che il più piccolo spazio proiettivo contenente r ed s è $\mathbb{P}^3$.
- Si scriva l'equazione del piano π contenente s e passante per Q.

Esercizio 3
Sia $\mathbb{P}^4$ lo spazio proiettivo reale di dimensione 4 dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Si considerino i sottospazi proiettivi S_1 e S_2 definiti dalle equazioni

$$S_1 : x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = x_0 = 0 \qquad S_2 : x_2 = x_3 + x_4$$

e il sottospazio S_3 caratterizzato dal fatto di essere il più piccolo sottospazio di $\mathbb{P}^4$ che contiene i punti

$$[0, 1, 0, 0, 0], \quad [3, 0, 6, 0, 0], \quad [0, 0, 1, 0, 0], \quad [0, 0, 0, 1, 1].$$

Ricavare, per ogni coppia (S_i, S_j) con $i \neq j$, la dimensione di $S_i \cap S_j$ e di $L(S_i, S_j)$.

Soluzione esercizio 1. La matrice associata alla conica $\mathcal{C}_k$ è

$$A_k := \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & k \end{array}\right]$$

che ha determinante $\mathrm{Det}(A_k) = -4$ indipendentemente da k. Si ha quindi che $\mathcal{C}_k$ è sempre non degenere. La matrice B_k dei termini quadratici ha determinante $k-4$. Di conseguenza, per $k < 4$, $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole e per $k = 4$ una parabola. Per $k > 4$ abbiamo $\mathrm{Det}(B_k) = k - 4 > 0$ e, siccome la somma degli autovalori è $1 + k > 0$, possiamo concludere che sono entrambi positivi. Di conseguenza $\mathcal{C}_k$ è un'ellisse a punti reali.

Sia $k = 1$. Abbiamo già visto che $\mathcal{C}$ è ha centro poichè è un'iperbole. La matrice dei termini quadratici è

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e ha polinomio caratteristico $(\lambda + 1)(\lambda - 3)$. Gli autovettori associati sono

$$\tilde{v}_{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per ridurre a forma canonica la conica dobbiamo, prima di tutto, ruotare i suoi assi di simmetria in modo che siano paralleli agli assi coordinati. Per farlo basta considerare la matrice ortogonale speciale M le cui colonne sono una base ortonormale di autovettori di B. Nel nostro caso

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chiamando (x_1, y_1) le coordinate di $\mathbb{E}^2$ ottenute applicando R abbiamo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) \end{bmatrix}.$$

e la relativa trasformazione inversa

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{bmatrix}.$$

M realizza un'isometria diretta R che annulla il termine misto della parte di secondo grado nell'equazione della conica: andando a trasformare l'equazione della conica $\mathcal{C}$ abbiamo infatti

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 4xy - 2x + 1 = \\ & = \frac{1}{2}(x_1 - y_1)^2 + \frac{1}{2}(x_1 + y_1)^2 - 4\frac{1}{2}(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) - 2\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) + 1 = \\ & = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1) + \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1) - 2(x_1^2 - y_1^2) - \sqrt{2}(x_1 - y_1) + 1 = \\ & = -x_1^2 + 3y_1^2 - \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}y_1 + 1. \end{aligned}$$

Per completare la riduzione a forma canonica ci basta completare i quadrati in x_1 e y_1.

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-4xy-2x+1 = [\dots] &= -x_1^2+3y_1^2-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1+1 = \\
&= -\left(x_1^2+2\frac{\sqrt{2}}{2}x_1\right)+3\left(y_1^2+2\frac{\sqrt{2}}{6}y_1\right)+1 = \\
&= -\left(x_1^2+2\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+3\left(y_1^2+2\frac{\sqrt{2}}{6}y_1+\frac{1}{18}-\frac{1}{18}\right)+1 = \\
&= -\left(x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+3\left(y_1+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2-\frac{1}{6}+1 = \\
&= -\left(x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3\left(y_1+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2+\frac{4}{3} = -X^2+3Y^2+\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

dove si è posto $X = x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $Y = y_1+\frac{\sqrt{2}}{6}$. Questa è proprio la traslazione che stavamo cercando per completare la riduzione a forma quadratica. L'isometria completa che permette di passare dall'equazione della conica nelle coordinate (x,y) a quella canonica nelle coordinate (X,Y) è quindi $S = T \circ R^{-1}$:

$$
\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T\left(M^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)+\frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}.
$$

La forma canonica dell'iperbole è quindi

$$
\frac{3}{4}X^2-\frac{9}{4}Y^2 = 1.
$$

□

Soluzione esercizio 2. Ricordiamo che $\mathbb{P}^3$ è il proiettivizzato di $\mathbb{R}^4$. Il sottospazio s è il proiettivizzato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 infatti esso è definito da 2 equazioni lineari indipendenti. Di conseguenza $\mathrm{Dim}(s) = 2-1$, cioè S è una retta. Per ricavare delle equazioni cartesiane per r basta imporre che il rango della matrice

$$
\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

risulti 2. In questo modo infatti il punto $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ è vincolato a essere una combinazione di P e Q. Per non utilizzare troppe equazioni annullando troppi minori possiamo orlare il minore non nullo di ordine 2

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

nei due modi possibili. Le equazioni che si ottengono sono una possibile coppia di equazioni cartesiane per r:

$$
x_0 = x_2 - x_3 = 0.
$$

Ricaviamo l'intersezione tra r e s. Per farlo basta mettere a sistema le equazioni cartesiane delle due rette ottenendo

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_0 = 0 \\ x_0 + x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

che ci dice che l'intersezione è vuota. r ed s sono quindi rette sghembe. Per la formula di Grassmann abbiamo quindi che il più piccolo spazio proiettivo che contiene r ed s ha dimensione $1 + 1 - (-1) = 3$ e coincide quindi con $\mathbb{P}^3$.

Per ricavare l'equazione del piano π possiamo considerare il fascia di piani contenente s e imporre poi il passaggio per Q. Il fascio si può scrivere così:

$$\lambda(x_2 + x_0) + \mu(x_0 + x_1 + x_3) = 0$$

con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Il passaggio per Q determina la seguente condizione su (λ, μ):

$$\lambda(1) + \mu(2) = 0$$

da cui si ricava $\lambda = -2\mu$. Siccome siamo interessati all'equazione a meno di scalari possiamo scegliere un valore per μ, ad esempio 1, ottenendo quindi:

$$\pi : -2x_2 - x_0 + x_1 + x_3 = 0.$$

$\square$

Soluzione esercizio 3. Incominciamo a ricavare delle equazioni cartesiane per S_3. Siccome si vede che i quattro punti sono indipendenti (ad esempio, trascurando l'ultima coordinata formano una matrice quadrata con determinante diverso da 0) basta imporre che il rango della matrice

$$M = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

venga 4, o in modo equivalente, che la matrice abbia determinante 0:

$$0 = \mathrm{Det}(M) = -3(x_4 - x_3).$$

L'equazione cartesiana per S_3 è quindi $x_3 - x_4 = 0$. Abbiamo quindi $\mathrm{Dim}(S_i) = i$ per $i = 1, 2, 3$. Ricaviamo le intersezioni tra le varie coppie di spazi.

Partiamo da $S_1 \cap S_2$: il sistema è

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e si vede facilmente che ha come unica soluzione la soluzione nulla che non corrisponde a nessun punto di $\mathbb{P}^4$. Abbiamo quindi $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Per Grassmann ricaviamo

$$\mathrm{Dim}(L(S_1, S_2)) = 1 + 2 - (-1) = 4$$

da cui si deduce $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}^4$.

Consideriamo ora $S_1 \cap S_3$. Notiamo che l'equazione cartesiana di S_3 compare tra quelle di S_1: questo vuol dire che S_1 è contenuto in S_3. Di conseguenza $S_1 \cap S_3 = S_1$ e $L(S_1, S_3) = S_3$.

Consideriamo infine $S_2 \cap S_3$. Il sistema è

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui deduciamo che $S_2 \cap S_3$ è il proiettivizzato del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato dai primi due vettori della base canonica. Di conseguenza $\mathrm{Dim}(S_2 \cap S_3) = 1$ e $\mathrm{Dim}(L(S_2, S_3)) = 2 + 3 - 1 = 4$. Perciò vale $L(S_2, S_3) = \mathbb{P}^4$. $\square$