Topologia

Laura Facchini

21 aprile 2011

Esercizio 1. *Sia X un insieme e sia p un suo punto fissato. Su X si consideri la topologia*

$$\tau := \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid p \in A\}.$$

Sia q un punto di X distinto da p.

1. *Si determini la parte interna, la chiusura e la frontiera di $\{p\}$ in (X, τ).*

2. *Si determini la parte interna, la chiusura e la frontiera di $\{q\}$ in (X, τ).*

Svolgimento. Si può controllare che τ è una topologia.

1. Poiché $\{p\}$ è un aperto di (X, τ), la sua parte interna (ovvero il più grande aperto di (X, τ) contenuto) è $\{p\}$ stesso.

   La chiusura di $\{p\}$ (ovvero il più piccolo chiuso di (X, τ) che lo contiene) è X, perché non esistono chiusi propri (cioè del tipo $\{A \subset X \mid p \notin A\}$) contenenti $\{p\}$.

   La frontiera di $\{p\}$ (ovvero la differenza insiemistica fra la sua chiusura e la sua parte interna) è $X \smallsetminus \{p\}$.

2. La parte interna di $\{q\}$ (ovvero il più grande aperto di (X, τ) contenuto) è $\emptyset$, perché non esistono aperti propri (cioè del tipo $\{A \subset X \mid p \in A\}$) contenuti in $\{q\}$.

   Poiché $\{q\}$ è un chiuso di (X, τ), la sua chiusura (ovvero il più piccolo chiuso di (X, τ) che lo contiene) è $\{q\}$ stesso.

   La frontiera di $\{q\}$ (ovvero la differenza insiemistica fra la sua chiusura e la sua parte interna) è $\{q\} \smallsetminus \emptyset = \{q\}$.

$\square$

Esercizio 2. *Sia $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Su X si consideri la topologia*

$$\tau := \{\emptyset\} \cup \{X\} \cup \{U \subset X \mid 0 \notin U\} \cup \{V \subset X \mid (-1, 1) \subset V\}.$$

Si verifichi che τ è una topologia.

Si determini la parte interna $\operatorname{int} Y_i$, la chiusura $\overline{Y_i}$ e la frontiera ∂Y_i dei seguenti sottospazi topologici di X:

$$Y_1 = \{1\}, \qquad Y_2 = \{0\}, \qquad Y_3 = \left[-\frac{1}{4}, 1\right), \qquad Y_4 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Svolgimento. La verifica che τ è una topologia segue immediatamente dalla definizione.

Y_i	$X \setminus Y_i$	aperto	chiuso	$\operatorname{int} Y_i$	$\overline{Y_i}$	∂Y_i
$Y_1 = \{1\}$	$[-1, 1)$	si	si	Y_1	Y_1	$\emptyset$
$Y_2 = \{0\}$	$[-1, 0) \cup (0, 1]$	no	si	$\emptyset$	Y_2	Y_2
$Y_3 = \left[-\frac{1}{4}, 1\right)$	$\left[-1, -\frac{1}{4}\right) \cup \{1\}$	no	si	$Y_3 \setminus \{0\}$	Y_3	$\{0\}$
$Y_4 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\left[-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$	si	no	Y_4	$\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$	$\{0\}$

□

Esercizio 3. *Sulla retta reale $\mathbb{R}$, si consideri la topologia τ determinata dalla base $\{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.*

1. *Provare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, l'intervallo $[a, b)$ è aperto e chiuso.*
2. *La funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$, definita da $f(x) = -x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è continua?*

Svolgimento.

1. $[a, b)$ è un elemento della base e quindi appartiene alla topologia, ovvero è un aperto.

   Per mostrare che $[a, b)$ è anche chiuso, basta dimostrare che il suo complementare è aperto:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus [a, b) &= (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [a - n, a) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [b, b + n) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi scritto il complementare di $[a, b)$ come unione di aperti. Possiamo quindi concludere che $[a, b)$ è chiuso.

2. Osserviamo che la controimmagine dell'aperto $[0, 1)$ è $(-1, 0]$. Ogni aperto di τ si scrive come unione di elementi della base e quindi non potrà mai essere un intervallo chiuso a destra. Quindi $(-1, 0]$ non è un aperto di τ e la funzione f non è continua.

$\square$

Esercizio 4. *Si consideri la retta reale $\mathbb{R}$ e siano τ_ε la topologia euclidea e*

$$\tau_s := \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

la topologia delle semirette.

Determinare se le seguenti applicazioni sono continue, al variare delle topologie:

1. $f : (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon) \to (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ *definita da* $f(x) = x^2$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*

2. $g : (\mathbb{R}, \tau_s) \to (\mathbb{R}, \tau_s)$ *definita da* $g(x) = x^2$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento.

1. Siano $a < b$. Consideriamo le controimmagini $f^{-1}((a, b))$ di un aperto di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

$$f^{-1}((a,b)) = \begin{cases} (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b}) & a \geq 0 \\ \emptyset & a < 0,\ b \leq 0 \\ (-\sqrt{b}, \sqrt{b}) & a < 0,\ b > 0 \end{cases}$$

La controimmagini degli aperti di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ sono aperti di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$, quindi f è continua.

2. Consideriamo le controimmagini $g^{-1}((-\infty, a))$ di un aperto di $(\mathbb{R}, \tau_s)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$$g^{-1}((-\infty, a)) = \begin{cases} (-\sqrt{a}, \sqrt{a}) \notin \tau_s & a > 0 \\ \emptyset & a \leq 0 \end{cases}$$

La controimmagine $(-1, 1)$ dell'aperto $(-\infty, 1)$ di $(\mathbb{R}, \tau_s)$ non è un aperto di $(\mathbb{R}, \tau_s)$, quindi f non è continua.

$\square$

Esercizio 5. *Si considerino la retta reale* $\mathbb{R}$ *ed* $X = [-1,1] \subset \mathbb{R}$*. Siano* τ_ε *la topologia euclidea,*

$$\tau_s := \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

la topologia delle semirette e

$$\tau := \{\emptyset\} \cup \{X\} \cup \{U \subset X \mid 0 \notin U\} \cup \{V \subset X \mid (-1,1) \subset V\}$$

una topologia su X*.*

Determinare se le seguenti applicazioni sono continue, aperte o chiuse, al variare delle topologie:

1. $f : (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon) \to (X, \tau)$ *definita da*
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & x < 0 \end{cases}$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$*;*

2. $g : (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon) \to (X, \tau)$ *definita da*
$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$*;*

3. $h : (\mathbb{R}, \tau_s) \to (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ *definita da* $h(x) = 3x$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*.*

Svolgimento.

1. Consideriamo le controimmagini $f^{-1}(Y)$ di un aperto Y di (X, τ).
$$f^{-1}(Y) = \begin{cases} \mathbb{R} & (-1,1) \subset Y \text{ oppure } 0 \notin Y,\ \pm\frac{1}{2} \in Y \\ [0, +\infty) \notin \tau_\varepsilon & 0, -\frac{1}{2} \notin Y,\ \frac{1}{2} \in Y \\ (-\infty, 0) & 0, \frac{1}{2} \notin Y,\ -\frac{1}{2} \in Y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$
La controimmagine $[0, +\infty)$ dell'aperto $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ di (X, τ) non è un aperto di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$, quindi f non è continua.

   Siano $a \leq b$. Consideriamo ora le immagini $f((a,b))$ di un aperto (a,b) di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
$$f((a,b)) = \begin{cases} \frac{1}{2} & a \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & b \leq 0 \\ X & a < 0,\ b > 0 \\ \emptyset & a = b \end{cases}$$

Le immagini degli aperti di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ sono aperti di (X, τ), quindi f è aperta.

Siano $a < b$. Consideriamo infine le immagini $f([a, b])$ di un chiuso $[a, b]$ di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

$$f([a,b]) = \begin{cases} \frac{1}{2} & a \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & b < 0 \\ X & a < 0,\ b \geq 0 \end{cases}$$

Le immagini $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$ dei chiusi $[0, 1]$ e $[-2, -1]$ di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ non sono chiusi di (X, τ), quindi f non è chiusa.

2. Consideriamo le controimmagini $g^{-1}(Y)$ di un aperto Y di (X, τ).

$$g^{-1}(Y) = \begin{cases} \mathbb{R} & (-1, 1] \subset Y \\ (-\infty, 0) & (-1, 1) \subset Y,\ 1 \notin Y \\ [0, +\infty) \notin \tau_\varepsilon & 1 \in Y,\ 0 \notin Y \\ \emptyset & Y = \emptyset \end{cases}$$

La controimmagine $[0, +\infty)$ dell'aperto $(0, 1]$ di (X, τ) non è un aperto di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$, quindi g non è continua.

Siano $a \leq b$. Consideriamo ora le immagini $g((a, b))$ di un aperto (a, b) di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

$$g((a,b)) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 \notin \tau & b \leq 0 \\ \{0, 1\} \notin \tau & a \leq 0,\ b > 0 \\ \emptyset & a = b \end{cases}$$

Le immagini $\{0\}$ e $\{0, 1\}$ degli aperti $(-1, 0)$ e $(-1, 1)$ di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ non sono aperti di (X, τ), quindi g non è aperta.

Siano $a < b$. Consideriamo infine le immagini $g([a, b])$ di un chiuso $[a, b]$ di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

$$g([a,b]) = \begin{cases} 1 & a \geq 0 \\ 0 & b < 0 \\ \{0, 1\} & a < 0,\ b \geq 0 \end{cases}$$

Le immagini dei chiusi di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ sono chiusi di (X, τ), quindi g è chiusa.

3. Consideriamo le controimmagini

$$h^{-1}((a,b)) = \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right) \notin \tau_s$$

di un aperto (a, b) di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$. La controimmagine $(0, 1)$ dell'aperto $(0, 3)$ di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ non è un aperto di $(\mathbb{R}, \tau_s)$, quindi h non è continua.

Consideriamo l'immagine $h((-\infty, a)) = (-\infty, 3a)$ di un aperto $(-\infty, a)$ di $(\mathbb{R}, \tau_s)$. Le immagini degli aperti di $(\mathbb{R}, \tau_s)$ sono aperti di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$, quindi h è aperta.

Consideriamo l'immagine $h([b, +\infty)) = [3b, +\infty)$ di un chiuso $[b, +\infty)$ di $(\mathbb{R}, \tau_s)$. Le immagini dei chiusi di $(\mathbb{R}, \tau_s)$ sono chiusi di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$, quindi h è chiusa.

$\square$

Esercizio 6. *Siano $X = Y = \mathbb{R}$. Su X si consideri la topologia euclidea τ_ε e su Y si consideri la topologia cofinita*

$$\tau_c := \{\emptyset\} \cup \{Y\} \cup \{U \subset Y \mid Y \smallsetminus U \text{ è finito}\}.$$

- *Si descriva lo spazio topologico prodotto $(X \times Y, \tau_{X\times Y})$.*
- *Si determini la parte interna, la chiusura e la frontiera di*

  $$Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset X \times Y$$

  nella topologia prodotto.

Svolgimento.

- Gli aperti non banali dello spazio prodotto $X \times Y$ con la topologia prodotto $\tau_{X\times Y}$ sono dati dall'unione degli elementi della base

  $$(a, b) \times U \qquad \text{tale che } a < b,\ a, b \in \mathbb{R} \text{ e l'insieme } Y \smallsetminus U \text{ è finito}$$

- Utilizzando gli aperti elementari assieme alla definizione di interno e chiusura, si vede facilmente che

  $$\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$$

  e che
  $$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

  Nel nostro caso, sappiamo che l'interno e la chiusura di $[0, 1]$ con la topologia euclidea sono rispettivamente $(0, 1)$ e $[0, 1]$. Vediamo quindi il caso della topologia cofinita.

  In τ_c, $\operatorname{int}[0, 1] = \emptyset$, poiché gli aperti non banali di τ_c sono i complementari di un numero finito di punti e nessuno di questi può essere contenuto in

$[0,1]$ perché $\mathbb{R} \smallsetminus [0,1]$ ha infiniti punti; quindi $\emptyset$ è il più grande aperto di τ_c contenuto in $[0,1]$.

Inoltre $\overline{[0,1]} = \mathbb{R}$, poiché i chiusi non banali sono costituiti da un numero finito di punti e quindi l'unico chiuso (e perciò minimo) di τ_c contenente $[0,1]$ è $\mathbb{R}$.

Abbiamo allora che

$$\operatorname{int} Q = (0,1) \times \emptyset = \emptyset \qquad \text{e} \qquad \overline{Q} = [0,1] \times \mathbb{R}.$$

$\square$

Esercizio 7. *Si considerino i seguenti spazi topologici*

- $X = \mathbb{R}$ *con la topologia euclidea* τ_ε
- $Y = \mathbb{R}$ *con la topologia* τ *i cui aperti non banali sono le semirette* $(-\infty, h)$ *con* $h \in \mathbb{R}$
- $Z = \mathbb{R}$ *con la topologia* η *i cui aperti non banali sono le semirette* $(k, +\infty)$ *con* $k \in \mathbb{R}$

Siano $(X \times Y, \tau')$ *e* $(X \times Z, \eta')$ *gli spazi topologici prodotto.*
Si consideri poi il sottoinsieme $S = [0,1] \times ((0,2) \cup [3,5])$ *di* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *con le topologie indotte da* τ' *ed* η'.

1. *Si descriva la topologia prodotto di* $X \times Y$.
2. *Si descriva la topologia prodotto di* $X \times Z$.
3. *Si descriva la topologia indotta da* τ' *su* S.
4. *Si descriva la topologia indotta da* η' *su* S.

Svolgimento.

1. Gli aperti non banali dello spazio prodotto $X \times Y$ con la topologia prodotto τ' sono dati dall'unione degli elementi della base

$$(a,b) \times (-\infty, h) \quad \text{con} \quad a < b \quad \text{e} \quad a, b, h \in \mathbb{R}.$$

2. Gli aperti non banali dello spazio prodotto $X \times Z$ con la topologia prodotto η' sono dati dall'unione degli elementi della base

$$(a,b) \times (k, +\infty) \quad \text{con} \quad a < b \quad \text{e} \quad a, b, k \in \mathbb{R}.$$

3. Gli aperti non banali di $S = [0,1] \times ((0,2) \cup [3,5])$ con la topologia indotta da τ' sono dati dall'unione degli elementi della base $A_\varepsilon \times A_\tau$, dove

$$A_\varepsilon := (a,b) \cap [0,1] = \begin{cases} [0,1] & a < 0,\ b > 1 \\ [0,b) & a < 0,\ 0 < b \leq 1 \\ (a,b) & a \geq 0,\ b \leq 1 \\ (a,1] & 0 \leq a < 1,\ b > 1 \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$A_\tau := (-\infty, h) \cap ((0,2) \cup [3,5]) = \begin{cases} (0,2) \cup [3,5] & h > 5 \\ (0,2) \cup [3,h) & 3 < h \leq 5 \\ (0,2) & 2 < h \leq 3 \\ (0,h) & 0 < h \leq 2 \\ \emptyset & h \leq 0 \end{cases}$$

4. Gli aperti non banali di $S = [0,1] \times ((0,2) \cup [3,5])$ con la topologia indotta da η' sono dati dall'unione degli elementi della base $A_\varepsilon \times A_\eta$, dove

$$A_\varepsilon := (a,b) \cap [0,1] = \begin{cases} [0,1] & a < 0,\ b > 1 \\ [0,b) & a < 0,\ 0 < b \leq 1 \\ (a,b) & a \geq 0,\ b \leq 1 \\ (a,1] & 0 \leq a < 1,\ b > 1 \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$A_\tau := (k, +\infty) \cap ((0,2) \cup [3,5]) = \begin{cases} (0,2) \cup [3,5] & k \leq 0 \\ (k,2) \cup [3,5] & 0 < k \leq 2 \\ [3,5] & 2 \leq k < 3 \\ (k,5] & 3 \leq k < 5 \\ \emptyset & k \geq 5 \end{cases}$$

$\square$