Geometria II

Esercitazione 30-05-2013

Luca Tasin

1 Esercitazioni

Esercizio 1. *Sia X un insieme infinito e sia $p \in X$. Si consideri la seguente famiglia di insiemi*

$$\tau = \{A \subset X : p \notin A\} \cup \{A \subset X : X \backslash A \text{ è finito}\}.$$

1. *Si dimostri che τ è una topologia su X.*

2. *Si dica se (X, τ) è connesso e se è compatto.*

Soluzione. 1. Chiaramente X e $\emptyset$ sono elementi di τ.

   Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di τ.

   Se $p \notin A_i$ per ogni $i \in I$, allora $p \notin \cup A_i$. Se $p \in A_k$ for $k \in I$, allora $X \backslash \cup A_i = \cap (X \backslash A_i)$ è finito in quanto $X \backslash A_k$ lo è.

   Supponiamo ora che I sia finito. Se esiste $k \in I$ tale che $p \notin A_k$, allora $p \notin \cap A_i$. Se $p \in A_i$ per ogni $i \in I$, allora $X \backslash A_i$ è finito per ogni $i \in I$ e dunque $X \backslash \cap A_i = \cup (X \backslash A_i)$ è finito in quanto unione finita di finiti.

2. (X, τ) non è connesso, infatti sia A un insieme finito che non contiene p, allora A è un aperto e chiuso non banale. Dimostriamo che (X, τ) è compatto. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Esiste $k \in I$ tale che $p \in U_i$ e dunque $X \backslash U_k$ è finito e possiamo quindi ricoprilo con un numero finito dei restanti U_i.

□

Esercizio 2. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Si dimostri che $f(x) = kx$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dove $k = f(1)$.*

Soluzione. Notiamo che $f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$ e dunque $f(0) = 0$.

Poniamo $k := f(1)$. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1 + \ldots + 1) = f(1) \ldots f(1) = kn$. Sia ora a/b un numero razionale con $a, b \in \mathbb{Z}$, allora

$$bf(a/b) = f(a/b) + \ldots + f(a/b) = f(a/b + \ldots + a/b) = f(a) = ka,$$

da cui $f(a/b) = ka/b$.

Dunque per ogni $q \in \mathbb{Q}$ abbiamo $f(q) = kq$. Sia ora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) = kx$. La funzione g è continua e $f_{|\mathbb{Q}} = g_{|\mathbb{Q}}$. Essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$, ed essendo $\mathbb{R}$ di Hausdorff, abbiamo che $f = g$ su tutto $\mathbb{R}$, da cui la tesi. □

Esercizio 3. *Sia $\mathbb{R}^n$ lo spazio euclideo reale n-dimensionale e si consideri la relazione d'equivalenza*

$$x \sim y \text{ se } \|x\| = \|y\|.$$

Si dica se $X = \mathbb{R}^n / \sim$ è compatto, connesso, di Hausdorff.

Soluzione. Dimostriamo che X è omeomorfo a $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ data da $x \mapsto \|x\|$. Sappiamo che f è continua (la topologia euclidea è la topologia più fine che rende la norma continua), dimostriamo che f è anche aperta. Sia $B = B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ una palla aperta di centro x e raggio r, e definiamo

$$m := \inf\{f(x) : x \in C\} \quad M := \sup\{f(x) : x \in C\}.$$

allora $f(B) = [0, M) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ se $0 \in B$, oppure $f(B) = (m, M) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ se $0 \notin B$.

Chiaramente f è suriettiva e dunque, passando al quoziente, otteniamo l'isomorfismo cercato. □