Esame scritto di Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2014/2015
Febbraio 2016

Esercizio 1
Sia $\mathbb{P}^3$ lo spazio proiettivo complesso tridimensionale dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si consideri il piano $\pi : x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$, le rette proiettive di equazioni

$$r : x_3 - 2x_0 - x_1 = x_3 + x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 \qquad s : x_2 - 3x_0 - 3x_1 = x_1 + x_0 = 0$$

e il punto $P = [2, 0, 1, 9]$.

1) Ricavare la posizione reciproca di r e s, di π e r e di π e s e le dimensioni degli spazi proiettivi $L(r, s)$, $L(\pi, r)$, $L(\pi, s)$ e $L(\pi, P)$.

2) Scrivere delle equazioni cartesiane per lo spazio $L(r, s)$.

3) Dire per quali valori di k le quadriche definite da

$$\mathcal{Q} : -28(3x_0 - x_1 - 2x_2)^2 + 4\pi(-3x_0 - x_3)^2 - 156(2x_1)^2 = 0$$

e

$$\mathcal{Q}_k : 5x_0^2 + 4k^2x_1^2 + 3(k-1)x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 = 0$$

sono proiettivamente equivalenti.

Esercizio 2
Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y). Si consideri, al variare di k, la matrice

$$A_k := \left[\begin{array}{c|cc} 2 & -2k-2 & -k-1 \\ \hline -2k-2 & 5k-1 & 2 \\ -k-1 & 2 & 5k-4 \end{array}\right]$$

e la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione:

$$\mathcal{C}_k : \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

1) Sapendo che $\mathrm{Det}(A) = -25(k-1)^3$, si dica per quali valori di k la conica $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole e per quali valori è degenere.

2) Sia k_0 un valore di k per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. Scrivere la sua forma canonica affine e un'isometria diretta che trasforma $\mathcal{C}_{k_0}$ nella sua forma canonica euclidea.

3) Ricavare l'equazione cartesiana (nelle coordinate (x, y)) dell'asse di simmetria di $\mathcal{C}_{k_0}$.

Esercizio 3
Si consideri la seguente collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ definita da

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \,|\, U^C \text{ è compatto in } (\mathbb{R}^n, \tau_e)\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$$

dove $U^C = \mathbb{R}^n \setminus U$ e τ_e è la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$.

1) Si dimostri che τ è una topologia su $\mathbb{R}^n$. Nel seguito, sia $X = (\mathbb{R}^n, \tau)$.

2) Esibire, se possibile, un elemento di $\tau \setminus \tau_e$ e un elemento di $\tau_e \setminus \tau$. Dire se X è connesso o T_2.

3) Si dica se X è compatto.

Esercizio 4
Si consideri $\mathbb{R}$ e la collezione

$$\tau = \{A_\epsilon \,|\, \epsilon > 0\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

con

$$A_\epsilon = (-1-\epsilon, -1+\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1+\epsilon).$$

1) Dimostrare che $X := (\mathbb{R}, \tau)$ è uno spazio topologico;

2) Discutere compattezza, connessione e dire quali assiomi di separazione $(T_0, T_1, T_2, \dots)$ sono soddisfatti da X;

3) Si consideri $f : X \to X$ con $f(x) = x$ se $|x| < 1$ e $f(x) = -x$ se $|x| \geq 1$. f è un omeomorfismo?

Soluzione dell'esercizio 1

Possiamo semplificare le equazioni di s ottenendo $x_2 = x_1 + x_0 = 0$. La posizione reciproca di r e s si ottiene controllando, ad esempio, la dimensione dell'intersezione tra r ed s. Questa si può dedurre dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o, in modo equivalente, provando a risolvere il sistema $A\underline{x} = 0$. La soluzione del sistema, in forma parametrica, è

$$\underline{x} = (a, -a, 0, a) \quad a \in \mathbb{C}$$

che corrisponde quindi a uno spazio proiettivo di dimensione 0, cioè un punto (per la precisione il punto $[1, -1, 0, 1]$). Questo implica che r ed s sono rette incidenti.

Per stabilire la posizione reciproca di π e r e di π e s basta calcolare i ranghi delle matrici

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che sono rispettivamente 3 e 2. Questo vuol dire che π ed r sono incidenti senza che r sia contenuta in π mentre s è contenuta in π. Si vede anche facilmente che $P \in \pi$. Da queste informazioni e dalla formula di Grassmann deduciamo

$$\mathrm{Dim}(L(r, s)) = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$\mathrm{Dim}(L(\pi, r)) = 2 + 1 - 0 = 3$$

$$\mathrm{Dim}(L(\pi, s)) = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\mathrm{Dim}(L(\pi, P)) = 2 + 0 - 0 = 2.$$

Un punto che appartiene a s ma non ad r è, ad esempio, $Q = [1, -1, 0, 0]$. Per determinare l'equazione cartesiana del piano $L(r, s)$ possiamo considerare il fascio di piani contenenti r

$$\lambda(x_3 - 2x_0 - x_1) + \mu(x_3 + x_0 + 2x_1 - x_2) = 0$$

e imporre il passaggio per il punto Q. Otteniamo $\lambda(-2+1) + \mu(1-2) = 0$ da cui ricaviamo

$$L(r, s) : 3x_0 + 3x_1 - x_2 = 0.$$

La matrice associata alla quadrica $\mathcal{Q}_k$ è

$$M_k = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4k^2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3(k-1) & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e ha rango massimo (4) se $k \neq \pm 1$, ha rango 3 se $k = -1$ e rango 2 se $k = 1$. La quadrica $\mathcal{Q}$ è degenere e ha equazione canonica $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (la proiettività che la riduce a forma canonica è suggerita dalla scrittura dell'equazione di Q nel testo dell'esercizio). Le quadriche $\mathcal{Q}_k$ e $\mathcal{Q}$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno la stessa forma canonica e questo quindi avviene se e solo se il rango di M_k è 3. Di conseguenza il valore cercato è $k = -1$.

Soluzione dell'esercizio 2
La matrice associata alla conica $\mathcal{C}_k$ è

$$A_k := \left[\begin{array}{c|cc} 2 & -2k-2 & -k-1 \\ \hline -2k-2 & 5k-1 & 2 \\ -k-1 & 2 & 5k-4 \end{array}\right]$$

mentre

$$B_k := \begin{bmatrix} 5k-1 & 2 \\ 2 & 5k-4 \end{bmatrix}$$

è la matrice dei termini quadratici.

Siccome $\operatorname{Det}(A_k) = -25(k-1)^3$, $\operatorname{Det}(B_k) = 25k(k-1)$ e $\operatorname{Tr}(B_k) = 5(2k-1)$ abbiamo i seguenti casi:

$k < 0$ Ellisse;

$k = 0$ Parabola;

$0 < k < 1$ Iperbole;

$k = 1$ Conica degenere;

$k > 1$ Ellisse.

Il valore che ci interessa analizzare è quindi $k_0 = 0$. Essendo $\mathcal{C}_0$ una parabola, la sua forma canonica affine è $y - x^2 = 0$. Riduciamo $\mathcal{C}_0$ a forma canonica euclidea. La matrice dei termini quadratici è

$$B_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori 0 e -5. Due autovettori indipendenti sono

$$v_{-5} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad v_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

quindi possiamo considerare la matrice ortogonale speciale

$$M = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

che corrisponde a una rotazione del piano. Se cambiamo coordinate ruotando il sistema di riferimento utilizzando la rotazione R abbiamo che la relazione che intercorre tra le vecchie coordinate e le nuove è

$$R : \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(x - 2y) \\ y_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2x + y) \end{cases}$$

e che l'espressione della conica $\mathcal{C}_0$ in queste coordinate è

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 4xy - 4y^2 - 4x - 2y + 2 = \\ &= -\frac{1}{5}(x_1+2y_1)^2 - \frac{4}{5}(-2x_1+y_1)^2 + \frac{4}{5}(-2x_1^2+2y_1^2-3x_1y_1) - \frac{4\sqrt{5}}{5}(x_1+2y_1) - \frac{2\sqrt{5}}{5}(-2x_1+y_1) - 2 = \\ &= -\frac{1}{5}(x_1^2 + 4y_1^2 + 16x_1^2 + 4y_1^2 + 8x_1^2 - 8y_1^2) - \frac{4\sqrt{5}}{5}(x_1 + 2y_1) - \frac{2\sqrt{5}}{5}(-2x_1 + y_1) - 2 = \\ &= -5x_1^2 - \frac{10\sqrt{5}}{5}y_1 - 2 \end{aligned}$$

La conica è quasi ridotta in forma canonica infatti possiamo raccogliere come segue i termini:

$$0 = -x^2 + 4xy - 4y^2 - 4x - 2y + 2 = [...] = -5x_1^2 - 2\sqrt{5}y_1 - 2 \iff$$
$$y_1 + \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{2}x_1^2 \iff$$
$$(-y_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}) = \frac{\sqrt{5}}{2}(-x_1)^2.$$

Effettuando l'isometria diretta[1] (una traslazione composta con una rotazione di π)

$$G : \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ y_2 = -y_1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

la parabola è ridotta a forma canonica : si scrive infatti come

$$y_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}x_2^2.$$

L'asse della parabola nelle coordinate (x_2, y_2) è $r : x_2 = 0$. Basta andare a sostituire le vecchie coordinate per ottenere l'espressione voluta:

$$x_2 = 0 \iff x_1 = 0 \iff x - 2y = 0 \iff y = \frac{x}{2}.$$

Soluzione dell'esercizio 3

Siano $A_i \in \tau$. Sappiamo, per definizione, che esistono $K_i \subset \mathbb{R}^n$ insiemi compatti rispetto alla topologia euclidea, per cui $A_i = K_i^C = X \setminus A_i$. Siccome

$$A_1 \cap A_2 = K_1^C \cap K_2^C = (K_1 \cup K_2)^C$$

e poichè $K_1 \cup K_2$ è compatto abbiamo che $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Analogamente, essendo l'intersezione di un numero di arbitrario di chiusi della topologia euclidea un chiuso nella topologia euclidea avremo che $\bigcap_i K_i$ è un chiuso di $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ contenuto, ad esempio, nel compatto K_1: questo mostra che è anche compatto. Di conseguenza

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i K_i^C = \left(\bigcap_i K_i\right)^C \in \tau.$$

Si ha quindi che τ è una topologia su $\mathbb{R}^n$.

Se $A \in \tau \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$, allora $A = K^C$ con K compatto di $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$. Per Heine-Borel abbiamo che K è chiuso e quindi $A = K^C \in \tau_e$. Di conseguenza avremo $\tau \subset \tau_e$ e non esistono elementi di $\tau \setminus \tau_e$. Un elemento di $\tau_e \setminus \tau$ è, ad esempio, la palla aperta di centro l'origine e raggio 1, infatti il suo complementare non è limitato e quindi non è compatto in $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$. Siccome τ è meno fine di τ_e e poichè $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ è connesso, avremo che anche X è connesso. Presi due aperti $A_1, A_2 \in \tau$ che siano non vuoti, si ha che $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ infatti, se $A_i = K_i^C$ con K_i compatti di $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$, si ha che $A_1 \cap A_2 = (K_1 \cup K_2)^C$ è il complementare di un insieme compatto e quindi vi appartengono tutti i punti che hanno una distanza euclidea sufficientemente alta dall'origine. Di conseguenza, dati due punti e presi due intorni, uno del primo e uno del secondo punto, si ha che non sono disgiunti: lo spazio non è T_2.

[1] Il fatto di prendere $x_2 = -x_1$ serve solo per considerare un'isometria diretta

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Possiamo assumere $U_i \neq \emptyset, \mathbb{R}^n$. In tal caso, chiamiamo $K_i = U_i^C$, i quali, per definizione, sono insiemi compatti per la topologia euclidea. Scegliamo uno di questi aperto, diciamo $U_o = K_o^C$, e osserviamo che $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di K_o con insiemi di τ e quindi di τ_e. Di conseguenza esistono un numero finito di elementi di $\mathcal{U}$ per cui vale $K_o \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_r$. Ma allora gli insiemi

$$\{U_o, U_1, \ldots, U_r\}$$

comprono tutto $\mathbb{R}^n$: abbiamo estratto un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. Questo ci dice che X è compatto.

Soluzione dell'esercizio 4

Per mostrare che (X, τ) è uno spazio topologico basta mostrare che τ è una topologia. L'insieme vuoto e X appartengono per ipotesi a τ. Presi due aperti U_1 e U_2 sappiamo che esistono ϵ_1 e ϵ_2 tali che $U_i = A_{\epsilon_i}$. Abbiamo

$$U_1 \cap U_2 = A_{\epsilon_1} \cap A_{\epsilon_2} = A_{\min(\epsilon_1, \epsilon_2)}$$

quindi l'intersezione di due aperti appartiene a τ. Si consideri ora una collezione di aperti (diversi dal vuoto e da X) $U_i = A_{\epsilon_i}$ con $i \in I$ e se ne consideri l'unione:

$$U := \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} A_{\epsilon_i}.$$

Se $s := \sup_{i \in I}(\epsilon_i)$ è finito abbiamo

$$U = \bigcup_{i \in I} A_{\epsilon_i} = A_s$$

mentre se s è infinito vale

$$U = \bigcup_{i \in I} A_{\epsilon_i} = \mathbb{R} = X.$$

In entrambi i casi abbiamo che l'unione di arbitrari elementi di τ è ancora un elemento di τ e questo basta per concludere che τ è una topologia su X.

Tutti gli aperti non vuoti di X si scrivono come unione di intervalli aperti di $\mathbb{R}$: si ha quindi che τ è una topologia comparabile con quella euclidea su $\mathbb{R}$. Essendo più debole (perchè non tutti gli aperti di $(\mathbb{R}, \tau_e)$ sono aperti di $(\mathbb{R}, \tau)$) possiamo concludere che (X, τ) è connesso.

(X, τ) non è compatto infatti la collezione di aperti $U_n := A_{n+1} = (-n-1, n+1)$ copre X ma non esiste nessun sottoricoprimento di X che sia finito.

(X, τ) non è T_0 infatti ogni aperto che contiene $P = 1$ contiene anche $Q = -1$ e vale il viceversa. Di conseguenza (X, τ) non è nemmeno T_1 e T_2.

Osserviamo che f è continua: si ha infatti che $f^{-1}(A_\epsilon) = A_\epsilon$ e quindi la controimmagine di un aperto è un aperto. f è invertibile con inversa uguale a f stessa infatti $f \circ f = \mathrm{Id}_X$. In particolare $f^{-1} = f$ è continua e questo basta per concludere che f è un omeomorfismo.