Esame scritto di Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in matematica
A.A. 2012/2013
10 giugno 2013

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. *Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo reale tridimensionale dotato del riferimento cartesiano standard (x, y, z). Sia $P = (1, 0, -1)$ un punto e siano $r(k)$ ed s le rette di equazioni*

$$r(k) : \begin{cases} kx - y + k = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

1. *Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $r(k)$ ed s sono incidenti e si trovi il punto di intersezione.*
2. *Determinare equazioni cartesiane della retta $t(k)$ passante per P e parallela a $r(k)$.*
3. *Siano $k = 1$ e $r = r(1)$. Si determini la distanza fra r ed s.*

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il piano affine reale dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y) e sia $\mathcal{C}(k)$ la conica definita come*

$$\mathcal{C}(k) : \quad x^2 + ky^2 + 2xy - 2x + k = 0.$$

1. *Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini la forma canonica $\mathcal{D}(k)$ di $\mathcal{C}(k)$.*
2. *Sia $k = -1$, si determini un'affinità $S : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $S(\mathcal{C}(-1)) = \mathcal{D}(-1)$.*

Esercizio 3. *Sia X un insieme infinito e sia $p \in X$. Si consideri la seguente famiglia di insiemi*

$$\tau = \{A \subset X : p \notin A\} \cup \{A \subset X : X \backslash A \text{ è finito}\}.$$

1. *Si dimostri che τ è una topologia su X.*
2. *Si dica se (X, τ) è connesso, compatto, Hausdorff.*
3. *Sia $f : \mathbb{R} \to X$ una mappa continua. Si dimostri che f è costante.*

Esercizio 4. *Ricordiamo che se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico X, si indica con $X/A = X/\sim_A$ il quoziente di X per la relazione di equivalenza data da*

$$x \sim_A y \text{ se e solo se } x = y \text{ oppure } x, y \in A.$$

Si dica quali dei seguenti spazi sono fra loro omeomorfi e quali no.

$$I = [0, 1], \qquad I/[0, 1/2], \qquad Y = I/\{0, 1/2\}.$$

Soluzioni

Soluzione esercizio 1.

1. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} kx - y + k = 0 \\ y + z - 2 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx - y + k = 0 \\ y = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx - y + k = 0 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

   otteniamo otteniamo che $r(k)$ e s sono incidenti per $k = 1/2$ e il punto di intersezione è $P = (1, 1, 1)$.

2. Calcoliamo un vettore direzione $v(k)$ per $r(k)$. Abbiamo $(-1, 0, 2) \in r(k)$, $(0, k, -k + 2) \in r(k)$ e dunque $v(k) = (1, k, -k)$ da cui otteniamo l'equazione parametrica $t(k) = (1 + c, ck, -1 - ck)$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. Da qui

$$\begin{cases} c = x - 1 \\ c = \frac{y}{k} \\ c = \frac{-1-z}{k} \end{cases}$$

   e quindi

$$t(k) : \begin{cases} y - kx + k = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

3. Costruiamo il piano π parallelo a r e contenente s. Il fascio dei piani contenenti s è dato da

$$\lambda(x - 2y + z) + \mu(z - 1) = 0$$

   per $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. La direzione normale è data dal vettore $(\lambda, -2\lambda, \lambda + \mu)$. Abbiamo già calcolato la direzione di r, che è data dal vettore $v = (1, 1 - 1)$ e quindi dobbiamo trovare (λ, μ) tali che

$$\lambda - 2\lambda - \lambda - \mu = -2\lambda - \mu = 0$$

   e dunque

$$\pi : \quad x - 2y + z - 2z + 2 = x - 2y - z + 2 = 0.$$

Ora possiamo calcolare la distanza d fra r ed s calcolando la distanza fra il punto $(-1, 0, 2)$ e il piano π:

$$d = \frac{|-1-2+2|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$\square$

Soluzione esercizio 2.

1. Consideriamo le matrici associate

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad A_0(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

e notiamo che $\det A(k) = k(k-1) - k = k(k-2)$, $\det A_0(k) = k - 1$ e che la traccia di A_0 è $k + 1$.

Perciò abbiamo

- se $k > 2$ allora $\mathcal{C}(k)$ è un'ellisse non degenere a punti non reali;
- se $1 < k < 2$ allora $\mathcal{C}(k)$ è un'ellisse non degenere a punti reali;
- se $k \neq 0$ e $k < 1$ allora $\mathcal{C}(k)$ è un'iperbole non degenere;
- se $k = 1$ allora $\mathcal{C}(1)$ è una parabola non degenere;
- se $k = 0$ allora $\mathcal{C}(0)$ è un'iperbole degenere;
- se $k = 2$ allora $\mathcal{C}(2)$ è un'ellisse degenere.

2. Applichiamo il metodo del completamento dei quadrati

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(-1) :\ & x^2 - y^2 + 2xy - 2x - 1 \\ =&(x + y - 1)^2 - y^2 - 1 + 2y - y^2 - 1 \\ =&(x + y - 1)^2 - 2(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 2 = 0.\end{aligned}$$

Possiamo dunque definire la affinità

$$S : (x, y) \mapsto (X, Y) = \sqrt{\frac{2}{3}}(x + y - 1, \sqrt{2}(y - \frac{1}{2}))$$

così che $S(\mathcal{C}(-1)) = \mathcal{D}(-1)$, dove

$$\mathcal{D}(-1) =: \quad X^2 - Y^2 = 1.$$

$\square$

Soluzione esercizio 3.

1. Chiaramente X e $\emptyset$ sono elementi di τ.

   Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di τ.

   Se $p \notin A_i$ per ogni $i \in I$, allora $p \notin \cup A_i$. Se $p \in A_k$ for $k \in I$, allora $X \backslash \cup A_i = \cap(X \backslash A_i)$ è finito in quanto $X \backslash A_k$ lo è.

   Supponiamo ora che I sia finito. Se esiste $k \in I$ tale che $p \notin A_k$, allora $p \notin \cap A_i$. Se $p \in A_i$ per ogni $i \in I$, allora $X \backslash A_i$ è finito per ogni $i \in I$ e dunque $X \backslash \cap A_i = \cup(X \backslash A_i)$ è finito in quanto unione finita di finiti.

2. (X, τ) non è connesso, infatti, sia A un insieme finito che non contiene p, allora A è un aperto e chiuso non banale.

   Dimostriamo che (X, τ) è compatto. Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Esiste $k \in I$ tale che $p \in U_k$ e dunque $X \backslash U_k$ è finito e possiamo quindi ricoprilo con un numero finito dei restanti U_i.

   Notiamo che se $q \in X$ e $q \neq p$ allora $\{q\}$ è chiuso e aperto (in quanto è finito e non contiene p). Dimostriamo che X è T_2. Siano $x, y \in X$, tali che $y \neq p$. Allora $U \backslash \{y\}$ è un intorno aperto di x e $V = \{y\}$ è un intorno aperto di y tali che $U \cap V = \emptyset$.

3. Sia $q \in X$, $q \neq p$. Allora $\{q\}$ è una componente connessa di X in quanto è aperto, chiuso e connesso. Questo implica che anche $\{p\}$ è una componente connessa di X. Allora l'immagine di f, che deve essere connessa, non può che essere un punto, cioè f è costante.

$\square$

Soluzione esercizio 4. I primi due spazi sono omeomorfi. Infatti, si consideri la mappa

$$f : I \to I$$

data da

$$f(x) : \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1/2] \\ 2x - 1 & \text{se } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Allora f è continua, chiusa (in quanto mappa continua da uno spazio compatto in uno spazio di Hausdorff) e suriettiva, da cui, passando al quoziente, si ottiene l'omeomorfismo cercato.

Mostriamo che I non è omeomorfo a $Y = I/\{0, 1/2\}$: esistono solo due punti che non disconnettono I, mentre ci sono infiniti punti che non disconnettono Y (infatti Y è omeomorfo alla lettera P). Per la precisione sia $x \in (0, 1/2)$ e sia $\pi : I \to Y$ la mappa quoziente. Allora è facile dimostrare che $Y \backslash \pi(x)$ è connesso.

$\square$