Esame scritto di Geometria 2

A.A. 2012/2013 - 1 luglio 2013

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. *Sia $\mathbb{A}^4$ lo spazio affine reale di dimensione 4 dotato del riferimento affine standard (x, y, w, z). Siano $P(k) = (k, -1, 0, 0)$, $Q_1 = (1, 0, 0, 1)$ e $Q_2 = (2, -1, 1, 1)$ punti di $\mathbb{A}^4$ e sia π l'iperpiano di equazione*

$$\pi : \quad x + y - z + 1 = 0.$$

1. *Sia s la retta passante per Q_1 e Q_2. Dimostrare che $s \cap \pi = \emptyset$.*
2. *Dimostrare che Q_1, Q_2 e $P(k)$ sono affinemente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{R}$ e trovare equazioni cartesiane per il piano $\tau(k)$ che li contiene.*
3. *Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\tau(k)$ e π sono paralleli.*

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo reale dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y) e sia $\mathcal{C}(k)$ la conica definita come*

$$\mathcal{C}(k) : 4x^2 + 4xy + (k+1)y^2 - 2ky + 1 = 0.$$

1. *Si determino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}(k)$ è degenere. Per tali valori si determini il tipo affine della conica $\mathcal{C}(k)$.*
2. *Sia $\mathcal{C} = \mathcal{C}(3)$. Si calcoli la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$, determinando un'isometria diretta $S : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.*

Esercizio 3. *Sia $X \subset \mathbb{N}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ si consideri l'insieme*

$$U_n = \{x \in X : x \text{ divide } n\}.$$

Sia $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n \in X}$.

1. *Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X. Indichiamo con τ tale topologia.*
2. *Sia $x \in X$. Si determini la chiusura di $\{x\}$.*
3. *Si dica se X è compatto, connesso, T_0 o T_1.*
4. *Si dimostri che X è connesso per archi.*

Esercizio 4. *Su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con la topologia euclidea si consideri la seguente relazione di equivalenza:*

$$x \sim y \text{ se e solo se esiste } \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0, \text{ tale che } x = \lambda y.$$

Sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$ lo spazio quoziente.

Sia Y il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}.$$

Si dica quali dei seguenti spazi topologici sono fra loro omeomorfi e quali no.

$$S^1 \times S^1, \quad X \times X, \quad Y, \quad Z := Y \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}.$$

Soluzioni

Soluzione esercizio 1.

1. Scriviamo s in forma parametrica. Un vettore direzionale per s è $v = Q_2 - Q_1 = (1, -1, 1, 0)$, da cui

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ w = t \\ z = 1 \end{cases}$$

   per $t \in \mathbb{R}$. Sostituendo in π otteniamo $1 = 0$ e quindi s e π sono disgiunti.

2. La retta s è contenuta nell'iperpiano di equazione $z = 1$, mentre $P(k)$ non è mai contenuto in $z = 1$, da cui segue che i tre punti non possono essere allineati.

   Otteniamo le equazione cartesiane per $\tau(k)$ calcolando i minori 3×3 della matrice

$$\begin{pmatrix} x-1 & y & w & z-1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\tau(k) : \begin{cases} x + (k-1)y + (k-2)w - 1 = 0 \\ y + w - z + 1 = 0. \end{cases}$$

3. Dobbiamo controllare per quali $k \in \mathbb{R}$ le giaciture di $\tau(k)$ e π sono una contenuta nell'altra (in questo caso, visto che π è un iperpiano potremmo equivalentemente controllare quando $\tau(k)$ e π sono disgiunti). Questo corrisponde a trovare i k per cui la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & (k-1) & (k-2) & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   ha rango minore o uguale 2. Ciò avviene solo per $k = 1$, che è dunque il valore richiesto.

□

Soluzione esercizio 2.

1. Siano

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 4 & 2 \\ -k & 2 & k+1 \end{pmatrix} \qquad A_0(k) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & k+1 \end{pmatrix}$$

   le matrici associate a $\mathcal{C}(k)$. Abbiamo che $\det A(k) = 4k(1-k)$, $\det A_0(k) = 4k$ e $\mathrm{Tr} A_0(k) = k+5$. Quindi $\mathcal{C}(k)$ è degenere per $k=0$ e $k=1$.

   Per $k=0$ due autovalori di $A(0)$ sono positivi ed uno è nullo, quindi $\mathcal{C}(0)$ sono rette parallele non reali. Per $k=1$ abbiamo invece rette non reali incidenti.

2. Per trovare l'isometria cercata partiamo calcolando una rotazione R che ci consenta di avere gli assi di $\mathcal{C}$ paralleli agli assi coordinati. Questo corrisponde a trovare una base ortonormale di $\mathbb{E}^2$ che diagonalizza A_0. Siccome stiamo considerando il caso $k=3$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Cerchiamo quindi gli autovalori di A_0. Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda-2)(\lambda-6),$$

   da cui $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$.

   I corrispondenti autovettori normalizzati sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

   e la matrice della rotazione R è

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Siano (x_1, x_2) le nuove coordinate rispetto alla base (v_1, v_2). Allora abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ -x_1 + y_1 \end{pmatrix}$$

da cui, ponendo $\mathcal{C}_1 = R^{-1}(C)$, otteniamo che $\mathcal{C}_1$ ha equazione

$$2(x_1+y_1)^2 + 2(x_1+y_1)(-x_1+y_1) + 2(-x_1+y_1)^2 - 3\sqrt{2}(-x_1+y_1) + 1$$
$$= 2x_1^2 + 6y_1^2 + 3\sqrt{2}x_1 - 3\sqrt{2}y_1 + 1 = 0.$$

La matrice associata alla trasformazione R^{-1} è

$$M^{-1} = M^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora trovare una traslazione che sposti il centro di $\mathcal{C}_1$ in $(0,0)$. Applichiamo il metodo del completamento dei quadrati.

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 :\ & 2x_1^2 + 6y_1^2 + 3\sqrt{2}x_1 - 3\sqrt{2}y_1 + 1 \\ & = 2\left(x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} + 6\left(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Da cui otteniamo la traslazione

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y_1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

e la forma canonica

$$D = T(\mathcal{C}_1) : \quad x_2^2 + 3y_2^2 = 1.$$

Abbiamo $S = T \circ R^{-1}$ e quindi

$$\begin{aligned} S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y_1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

Soluzione esercizio 3. 1. Per ogni $x \in X$, $x \in U_x$, inoltre (se $U_x \cap U_y \neq \emptyset$)

$$U_x \cap U_y = \{z \in X : z|x \text{ e } z|y\} = \{z \in X : z|MCD(x,y)\} = U_{MCD(x,y)}$$

e dunque $\mathcal{B}$ è una base per una topologia.

2. Consideriamo il ricoprimento aperto $\{U_n\}_{n \in X}$. Dato che ogni U_n è finito non esiste nessun sottoricoprimento finito e quindi X non è compatto.

   Dimostriamo che per ogni $x \in X$, $\overline{\{x\}} = \{y \in X : x|y\}$. Poniamo $C_x = \{y \in X : x|y\}$ e dimostriamo che C_x è il più piccolo chiuso che contiene x.

   Preso $n \in X \backslash C_x$, abbiamo $U_n \subset (X \backslash C_x)$, in quanto nessun divisore di n può essere un multiplo di x e dunque C_x è chiuso.

   Si noti che se se U è un aperto e $n \in U$, allora $U_n \subset U$, in quanto ogni elemento della base che contiene n deve contenere anche U_n.

   Sia C un chiuso tale che $\overline{\{x\}} \subset C$ e sia y un multiplo di x. Se per assurdo $y \in (X \backslash C)$, allora $x \in U_y \subset (X \backslash C)$, una contraddizione. Dunque $C_x \subset C$ e abbiamo finito.

3. Lo spazio X non è compatto, in quanto $\mathcal{B}$ costituisce un ricoprimento da cui non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

   Dato che $\overline{\{x\}} \neq \{x\}$, vediamo subito che X non è T_1, in quanto i punti non sono chiusi. Del resto siano $x, y \in X$ punti distinti tali che $x < y$. Allora U_x è un intorno di x che non contiene y e dunque X è T_0.

   Siano C, D chiusi non vuoti di X e siano $x \in C$ e $y \in D$, allora, dato che $\overline{\{x\}} \subset C$ e $\overline{\{y\}} \subset D$, il prodotto xy è un elemento di $C \cap D$ e quindi due chiusi non vuoti di X si intersecano sempre. Dunque X è connesso.

4. Siano $p, q \in X$ due punti di X e sia $r \in \overline{\{p\}} \cap \overline{\{q\}}$. Definiamo $f : [0,1] \to X$ come

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{se } x \in [0, 1/2) \\ r & \text{se } x \in 1/2 \\ q & \text{se } x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

   E' facile controllare che la controimmagine di un chiuso è chiusa, e quindi f è continua.

$\square$

Soluzione esercizio 4. Notiamo che $X \cong S^1$. Infatti, se consideriamo la mappa

$$f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to S^1$$

data da $x \to x/\|x\|$, abbiamo che f è chiaramente continua, aperta e suriettiva. Inoltre

$$x \sim_f y \Longleftrightarrow x/\|x\| = y/\|y\| \Longleftrightarrow x \sim y$$

da cui $X \cong S^1$ e quindi $S^1 \times S^1 \cong X \times X$.

Lo spazio Y non è compatto in quanto non è limitato (si tratta di un cono quadrico). Del resto Y è chiuso e quindi Z è compatto. Da ciò si evince che Y non è omeomorfo a nessuno degli altri tre spazi.

Per concludere notiamo che Z (e anche Y) si sconnette togliendo l'origine di $\mathbb{R}^3$ e quindi non è omeomorfo a $S^1 \times S^1$.

$\square$