Esame scritto di Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2013/2014
12 giugno 2014

Esercizio 1
Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale reale dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y, z). Si considerino i punti $P = (2, 3, -1)$ e $Q = (0, 1, 0)$, il vettore $d = (1, -1, 1)$ e il piano π_k di equazione

$$2x + ky + 2z = 1$$

dove k è un parametro reale.

1) Si indichi con r la retta passante per P con direttrice d e con s_k la retta per Q ortogonale a π_k. Scrivere delle equazioni cartesiane per r e delle equazioni parametriche per s_k.

2) Ricavare, al variare di k, la posizione reciproca di r e di s_k.

3) Sia R il punto di r che dista $2\sqrt{3}$ da P e che ha coordinata z positiva. Ricavare le coordinate di R.

4) Sia T il punto di coordinate $(4 + \sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2})$. Ricavare angoli ed area del triangolo di vertici P, R, T.

Esercizio 2
Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo reale dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Si consideri la retta r_∞ descritta dalla relazione $x_0 = 0$ e sia $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus r_\infty$ il piano affine reale con coordinate affini $(y_1, y_2) = (x_1/x_0, x_2/x_0)$. Si consideri, al variare del parametro k, la conica proiettiva C_k descritta dall'equazione

$$\mathcal{C}_k : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_2 + 2kx_1x_2 = 0.$$

1) Per quali valori di k, $\mathcal{C}_k$ è non degenere?

2) Ricavare la forma canonica di $\mathcal{C}_k$ al variare di k.

3) Si scriva l'equazione della curva affine $\mathcal{D}$ associata alla conica $\mathcal{C}_1$. Ricavare la forma canonica affine di $\mathcal{D}$ e dire di che tipo di conica si tratta.

4) Scrivere una proiettività che manda $\mathcal{C}_3$ nella sua forma canonica.

Esercizio 3
Sia $I := [0, 1)$ e si consideri lo spazio topologico $X = (I, \tau)$ dove τ è la topologia generata dalla seguente collezione di sottoinsiemi di I:

$$\{(0, \delta) \mid \delta \in (0, 1]\}.$$

Si consideri il sottospazio $Y = (\{0\} \cup (1/2, 1), \tau_Y)$ con τ_Y topologia indotta da quella su X.

1) Dimostrare che X è connesso e T_0.

2) X è T_1? X è compatto? X è connesso per archi? X è uno spazio di Hausdorff?

3) Calcolare la chiusura di $\{0\}$ e di $\{3/4\}$ in Y.

4) Esibire, se possibile, un arco continuo in Y che collega 0 a 3/4.

Esercizio 4
Si consideri l'insieme

$$X = \{\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_n \in \{0, 1\} \quad \forall n > 0\}$$

e si consideri la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione $d(\underline{x}, \underline{y}) = 2^{-n}$ se il primo intero per cui si ha $x_k \neq y_k$ è n (cioè per tutti gli interi minori di n si ha che $x_k = y_k$) e da $d(\underline{x}, \underline{x}) = 0$. Sia P il punto di X che corrisponde alla successione composta solo da zeri: $P = (0, 0, 0, \dots)$.

1) Si dimostri che (X, d) è uno spazio metrico e se ne ricavi il diametro.

2) Ricordando che con $B_r(x)$ si indica la palla aperta di centro x e raggio r rispetto alla distanza d, si ricavi la chiusura, l'interno e il bordo dei seguenti insiemi:

$$\{P\}, B_{1/4}(P) \text{ e } B_{1/6}(P).$$

3) Si dica se (X, τ) è connesso.

4) Si dimostri che (X, d) è totalmente limitato.

Soluzione dell'esercizio 1

Delle equazioni parametriche per r e s sono

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + kt \\ z = 2t \end{cases} .$$

Esplicitando t dalla prima equazione dell'espressione parametrica ricavata per r si ottengono delle equazioni cartesiane per r:

$$\begin{cases} t = x - 2 \\ y = 3 - x + 2 \\ z = -1 + x - 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ z - x + 3 = 0 \end{cases} .$$

Notiamo che le direttrici delle rette r e s_k sono proporzionali se e solo se $k = -2$. Siccome la coordinate di Q non soddisfano l'equazione cartesiana di r abbiamo che per $k = -2$ le due rette sono parallele. Per gli altri valori possiamo sostituire l'espressione parametrica di s_k nell'equazione cartesiana di r per vedere se sono incidenti. Il sistema risultante

$$\begin{cases} 2t + 1 + kt - 5 = 0 \\ 2t - 2t + 3 = 3 = 0 \end{cases} .$$

non ha mai soluzioni quindi le due rette sono disgiunte e, per $k \neq -2$, con direzioni non proporzionali: r e s_k sono sghembe.

Il punto R cercato sarà un punto del tipo $R = (2 + t, 3 - t, -1 + t)$ perchè è un punto di r. Perchè la distanza sia quella richiesta dobbiamo avere

$$2\sqrt{3} = d(P, R) = |(2 + t - 2, 3 - t - 3, -1 + t + 1)| = \sqrt{3t^2}$$

da cui ricaviamo $|t| = 2$. Siccome vogliamo $z = -1 + t > 0$ dobbiamo prendere $t = 2$ ottenendo il punto $R = (4, 1, 1)$.

Incominciamo ricavando i tre vettori $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{RT}$ e $\overrightarrow{PT}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= R - P = (2, -2, 2) \\ \overrightarrow{RT} &= T - R = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \\ \overrightarrow{PT} &= T - P = (2 + \sqrt{2}, -2, 2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PR}| &= 2\sqrt{3} \\ |\overrightarrow{RT}| &= 2 \\ |\overrightarrow{PT}| &= 4 \\ < \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RT} > &= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0 \\ < \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PT} > &= 2(2 + \sqrt{2}) + 4 + 2(2 - \sqrt{2}) = 12 \end{aligned}$$

da cui deduciamo che l'angolo in R è retto e che l'area del triangolo è

$$A_{PRT} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PR}||\overrightarrow{RT}| = 2\sqrt{3}.$$

L'angolo θ_P in P soddisfa

$$\cos(\theta_P) = \frac{<\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PT}>}{|\overrightarrow{PR}||\overrightarrow{PT}|} = \frac{12}{8\sqrt{3}} = \sqrt{3}/2$$

e quindi $\theta_P = \pi/6$. Il terzo angolo vale di conseguenza $\theta_T = \pi/3$.

Soluzione dell'esercizio 2
La matrice associata alla conica $\mathcal{C}_k$ è

$$A_k := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

che ha determinante $\mathrm{Det}(A) = -k^2$. Si ha quindi che $\mathcal{C}_k$ è degenere se e solo se $k = 0$.

Il polinomio caratteristico di A_k è

$$\chi_{A_k}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda k^2 - 2\lambda - k^2 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - k^2).$$

Gli autovalori di A_k sono quindi

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1+k^2} \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{1+k^2} \quad \lambda_3 = 1.$$

Per $k \neq 0$ la forma canonica di $\mathcal{C}_k$ è quindi

$$\mathcal{C}'_k : x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Per $k = 0$ la matrice A_0 ha rango 2 e gli autovalori non nulli di A_0 hanno segno concorde quindi la forma canonica è

$$\mathcal{C}'_k : x_0^2 + x_1^2 = 0.$$

L'equazione richiesta si ottiene deomogeneizzando rispetto a x_0 :

$$\mathcal{D} : 1 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_2 + 2y_1y_2 = 0.$$

La matrice associata è

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Siccome la sottomatrice dei termini di grado 2 ha rango 1 (e siccome sappiamo che la conica non è degenere), $\mathcal{D}$ è una parabola e ha equazione canonica $\mathcal{D}$ è $y_2 - y_1^2 = 0$.

Applichiamo il metodo del completamento dei quadrati per ricavare la forma canonica di $\mathcal{C}_3$:

$$\begin{multline} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_2 + 6x_1x_2 = \\ = (x_0^2 + 2x_0x_2 + x_2^2) + x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 9x_2^2 = \\ = (x_0 + x_2)^2 + (x_1 + 3x_2)^2 - 9x_2^2 \quad (1) \end{multline}$$

Se definiamo quindi la proiettività

$$F : [x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_0 + x_2, x_1 + 3x_2, 3x_2]$$

avremo che F ci permette di scrivere la conica in forma canonica. Esplicitamente, se abbiamo

$$[X_0, X_1, X_2] = F([x_0, x_1, x_2]),$$

per i conti appena fatti avremo

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_2 + 6x_1x_2 = [...] = \\ = (x_0 + x_2)^2 + (x_1 + 3x_2)^2 - 9x_2^2 = X_0^2 + X_1^2 - X_2^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Soluzione dell'esercizio 3

La topologia τ è composta, oltre che da X e dall'insieme vuoto, di tutti e soli gli insiemi del tipo $(0, \delta)$ con $\delta \in (0, 1]$. Questo vuol dire che ogni aperto di X è anche un aperto di (I, τ_e) dove τ_e è la topologia indotta da quella euclidea su I. Siamo quindi di fronte a due topologie confrontabili con quella di X che è più debole. Tra le varie conseguenze di questo fatto, abbiamo che ogni funzione $f : [0, 1] \to I$ (stiamo munendo $[0, 1]$ della topologia euclidea) che è continua per la topologia euclidea è continua con τ. In particolare, siccome (I, τ_e) è connesso per archi, anche X lo è. Lo stesso vale per la connessione.

Mostriamo che X è T_0. Siano a, b due punti distinti di X. Se $a = 0$ allora ogni intorno di b diverso da X non contiene a. Se entrambi sono diversi da 0 posso assumere $a < b$: l'insieme $(0, (a + b)/2)$ è un aperto in X che contiene a ma non b. Abbiamo mostrato che per ogni coppia di punti esiste un aperto che contiene uno dei due ma non l'altro: questa è la definizione di spazio topologico T_0.

X è compatto infatti se $\{U_j\}_{j \in J}$ è una collezione di aperti di X che copre X allora esiste almeno un $\bar{j} \in J$ tale che $0 \in U_{\bar{j}}$. Ma l'unico aperto di X che contiene 0 è X quindi ogni ricoprimento aperto contiene X. Un sottoricoprimento finito è quindi $\{U_{\bar{j}}\} = \{X\}$.

Mostrare che $P = \{3/4\}$ non è chiuso è semplice infatti il suo complementare non è aperto. Questo basta per concludere che X non è T_1 (e di conseguenza nemmeno di Hausdorff). Siccome gli aperti non banali sono tutti e soli gli insiemi del tipo $(0, \delta)$, i chiusi in X diversi da X e dal vuoto sono del tipo

$$\{0\} \cup [\delta, 1)$$

con $\delta \in (0, 1]$ e $\{0\}$. I chiusi di Y sono della stessa forma con $\delta \in (1/2, 1]$. Di conseguenza la chiusura di P in Y è $\overline{P} = \{0\} \cup [3/4, 1)$.

Il punto $Q = \{0\}$ è chiuso in X infatti il suo complementare è $(0, 1)$ che è un aperto. Di conseguenza Q è anche un chiuso in Y infatti $Q = Q \cap Y$ (tutti i chiusi di Y sono di questo tipo).

Si consideri l'arco $f : [0, 1] \to Y$ tale che $f(0) = 0$ e $f(t) = 1/2 + t/4$ (si ha quindi $f(1) = 3/4$). Mostriamo che f è un arco continuo in Y. Definiamo, per comodità, $U_\delta = (1/2, \delta)$ con $\delta \in (1/2, 1]$ e $U_0 = Y$. Questi sono tutti e soli gli aperti non vuoti di Y. Si ha

$$f^{-1}(U_\delta) = \begin{cases} \text{se } \delta = 0 & f^{-1}(Y) = [0, 1] \\ \text{se } \delta < 3/4 & (0, 4\delta - 2) \\ \text{se } \delta \geq 3/4 & (0, 1] \end{cases}$$

quindi la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di $[0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea: f è un arco continuo in Y che collega 0 e $3/4$.

Soluzione dell'esercizio 4

Presi due punti distinti $\underline{x}$ e $\underline{y}$ in X, esiste il più piccolo intero $n \geq 1$ tale che $x_k \neq y_k$. Di conseguenza $d(\underline{x}, \underline{y}) = 2^{-n} \neq 0$. Questo mostra che d soddisfa la proprietà di annullamento.

Siccome d è chiaramente simmetrica, per mostrare che è una distanza su X basta vedere che soddisfa la disuguaglianza triangolare. Supponiamo che $\underline{x}, \underline{y}$ e $\underline{z}$ siano tre punti distinti. Se $d(\underline{x}, \underline{y}) = 2^{-n}$ allora il più piccolo intero per cui $x_k \neq y_k$ è n. Se il più piccolo intero per cui $x_k \neq z_k$ è m distinguiamo due casi. Se $m \leq n$ abbiamo $2^{-n} \leq 2^{-m}$ e quindi

$$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y}).$$

Se invece $m > n$ avremo $z_n = x_n \neq y_n$ da cui $d(\underline{y}, \underline{z}) = 2^{-n}$ che rende vera la disuguaglianza triangolare anche in questo caso. Questo mostra che (X, d) è uno spazio metrico.

Per definizione la massima distanza tra due punti di X si ha quando i termini iniziali delle due successioni sono distinti: in questo caso si ha $d(\underline{x}, \underline{y}) = 2^{-1} = 1/2$ quindi il diametro di X è $1/2$.

Essendo uno spazio metrico uno spazio topologico di Hausdorff abbiamo che $\{P\}$ coincide con la sua chiusura e con la sua frontiera mentre il suo interno è vuoto. Avremo

- $B_{1/4}(P) = \left(B_{1/4}(P)\right)^o = \{(0, 0, x_2, \dots) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$ infatti per definizione $B_{1/4}(P)$ è aperto.

- $B_{1/4}(P) = \overline{B_{1/4}(P)}$ poichè ogni punto Q con distanza da P maggiore o uguale a $1/4$ è del tipo $Q = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ con $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. In particolare, infatti, si ha che la distanza di Q da ogni punto di $B_{1/4}(P)$ è $1/2$ o $1/4$ e questo dimostra che la palla di centro Q e raggio $r < 1/4$ è interamente contenuta nel complementare di $B_{1/4}(P)$: Q è punto esterno a $B_{1/4}(P)$.

- $\partial B_{1/4}(P) = \emptyset$ per quanto visto nei punti precedenti.

Per $B_{1/6}(P)$ la cosa è analoga:

- $\partial \left(B_{1/6}(P)\right) = \emptyset$

- $B_{1/6}(P) = \left(B_{1/6}(P)\right)^o = \overline{B_{1/6}(P)} = \{(0, 0, 0, x_i, \dots) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$

Quest'ultimo punto ci permette anche di rispondere all'ultima domanda infatti abbiamo un insieme diverso da X e dal vuoto che è contemporaneamente aperto e chiuso: $B_{1/6}(P)$. Questo è equivalente a dire che X non è connesso.

Per dimostrare che X è totalmente limitato, basta dimostrare che per ogni n bastano un numero finito di palle di raggio 2^{-n} per coprire X. Siccome le successioni $\underline{y}$ che appartengono alla palla di centro $\underline{x}$ e raggio 2^{-n} sono tutte e sole quelle che hanno i primi n termini uguali ai corrispondenti termini di $\underline{x}$ (cioè $x_k = y_k$ per $k \leq n$) possiamo considerare le 2^n successioni di X che hanno $x_k = 0$ per $k > n$. Ad esempio, per $n = 2$, avremo che ogni punto dello spazio appartiene a una delle palle di raggio r e centro uno dei seguenti 4 punti:

$$(0, 0, \underline{0}, \dots), (0, 1, \underline{0}, \dots), (1, 0, \underline{0}, \dots), (1, 1, \underline{0}, \dots)$$

(dove con $\underline{0}$ intendiamo che la successione continua con una sequenza infinita di 0). Questo perchè una successione $\underline{y}$ inizia nello stesso modo di una delle quattro successioni scritte qui sopra e quindi la distanza tra $\underline{y}$ e questa sarà minore di 2^{-2}. Questo ragionamento mostra che X è totalmente limitato.