

Esame scritto di Geometria 2

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

A.A. 2013/2014

21 luglio 2014

Esercizio 1

Sia \mathbb{E}^3 lo spazio euclideo tridimensionale reale dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y, z) . Si considerino il punto $P = (2, 3, -1)$ e la retta r di equazione $x + y = x - z = 0$.

- 1) Sia s la retta passante per P e parallela a r . Sia t la retta passante per P che taglia ortogonalmente r ed s . Scrivere delle equazioni cartesiane per t e delle equazioni parametriche per s .
- 2) Sia π il piano contenente s e passante per il punto $T = (1, 1, 1)$. Scrivere una rappresentazione parametrica e cartesiana per π .
- 3) Ricavare un'equazione cartesiana per il piano τ ortogonale a s passante per P .
- 4) Individuare le rette passanti per P e contenute in π che formano con s un angolo θ tale che $\cos(\theta) = 1/\sqrt{3}$.

Esercizio 2

Sia \mathbb{P}^3 lo spazio proiettivo reale tridimensionale dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si consideri il piano π_∞ descritto dalla relazione $x_0 = 0$ e sia $\mathbb{A}^3 = \mathbb{P}^3 \setminus \pi_\infty$ lo spazio affine con coordinate affini $(y_1, y_2, y_3) = (x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0)$. Si consideri, al variare del parametro reale k , la quadrica proiettiva Q_k descritta dall'equazione

$$Q_k : x_1^2 - 2x_0x_2 + x_2^2 - 2x_0x_3 + k(x_0^2 - 2x_2x_3 - x_3^2) = 0.$$

- 1) Si scrivano delle equazioni cartesiane per la chiusura proiettiva della retta di \mathbb{A}^3 passante per $(0, 2, 3)$ avente direttrice $(2, -2, 1)$. Si ricavi la posizione reciproca di questa retta e π_∞ .
- 2) Per quali valori di k , Q_k è degenere?
- 3) Determinare una proiettività che manda Q_0 nella sua forma canonica e dire se tale proiettività è unica.

Esercizio 3

Siano $X = \mathbb{R}$ munito della topologia euclidea $\tau_X = \tau_e$ e $Y = \{0, 1\}$ munito della topologia banale τ_Y . Si consideri $Z := X \times Y$ munito della topologia prodotto τ .

- 1) Dire se Z è compatto, connesso o T_2 ;
- 2) Dimostrare che l'insieme $K := ((a, b) \times \{0\}) \cup ([a, b] \times \{1\})$ è un insieme compatto di Z . *Suggerimento: dimostrare che, per ogni collezione \mathcal{U} di aperti di Z che copre K , si ha che \mathcal{U} copre anche $[a, b] \times \{0, 1\}$.*
- 3) Si consideri la seguente proposizione:

Sia T uno spazio topologico e si considerino due suoi sottospazi compatti A e B .

Allora, se $A \cap B \neq \emptyset$, si ha che $A \cap B$ è compatto.

Dimostrare che la proposizione è vera per uno spazio topologico T_2 .

Dimostrare che la proposizione è falsa per $T = Z$.

Esercizio 4

Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ la palla di centro $(0, 0)$ e raggio 3:

$$B_3((0, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 3\}$$

Si consideri su X la topologia generata dalla seguente collezione di insiemi:

$$\{B_r((x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^+, B_r((x, y)) \subset B_1((0, 0))\} \cup \{B_r((0, 0)) \mid r \in (0, 3)\}.$$

Sia Y il sottospazio ottenuto intersecando X con $\{(x, y) \mid |y| \geq 1\}$ munito della topologia indotta da quella su X .

- 1) Dire se X è compatto, connesso, T_0 o T_1 .
- 2) Siano $P, Q \in Y$ con $|OP| \leq |OQ|$ e si consideri la funzione $f : [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $f(x) = P$ per $x < 1$ e $f(1) = Q$. Dire se f è continua (munendo $I = [0, 1]$ della topologia euclidea) e se Y è connesso per archi.
- 3) Si ricavino bordo, chiusura e interno per i seguenti insiemi di X :

$$Z_1 = \{(0, 0)\} \quad Z_2 = B_1((0, 0)) \quad Z_3 = \{P \mid 1 < |OP| < 2\}.$$

Soluzione dell'esercizio 1

Delle possibili equazioni parametriche per r si ottengono usando come parametro $\alpha = x$:

$$r : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} .$$

La retta s sarà quindi

$$s : \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases} .$$

Un'equazione cartesiana si può ottenere esplicitando α in una delle equazioni e sostituendo nelle altre:

$$s : \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ z - x + 3 = 0 \end{cases} .$$

Sia Q_α un punto di r specificato tramite la parametrizzazione ricavata. Il vettore $\overrightarrow{PQ_\alpha}$ è una direttrice per la retta t se e solo se $\overrightarrow{PQ_\alpha}$ è ortogonale alla direttrice di r (e quindi di s visto che sono rette parallele). La condizione da imporre è quindi

$$0 = \langle \overrightarrow{PQ_\alpha}, (1, -1, 1) \rangle$$

da cui si ottiene

$$\langle Q_\alpha - P, (1, -1, 1) \rangle = \langle (\alpha - 2, -\alpha - 3, \alpha + 1), (1, -1, 1) \rangle = 3\alpha + 2 = 0$$

quindi una direttrice per t è

$$\overrightarrow{PQ_{-2/3}} = \frac{1}{3}(-8, -7, 1)$$

o un suo multiplo come ad esempio $(8, 7, -1)$. Un'equazione parametrica per t è quindi

$$t : \begin{cases} x = 2 + 8\alpha \\ y = 3 + 7\alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases} .$$

La direttrice di s appartiene alla giacitura di π e lo stesso vale per il vettore

$$\overrightarrow{PT} = (1, 1, 1) - (2, 3, -1) = (-1, -2, 2).$$

Essendo indipendenti generano la giacitura di π e questo ci permette di scrivere le seguenti equazioni parametriche

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + \alpha - \beta \\ y = 3 - \alpha - 2\beta \\ z = -1 + \alpha + 2\beta \end{cases} .$$

Sommando le ultime due equazioni otteniamo un'espressione lineare nelle sole coordinate dello spazio, cioè un'equazione cartesiana per π : $y + z - 2 = 0$.

Il piano τ ortogonale a s per P ha equazione cartesiana

$$\tau : (x - 2) - (y - 3) + (z + 1) = 0 \implies x - y + z = -2.$$

La direttrice di una retta per P e contenuta in π è un vettore ortogonale a $n_\pi = (0, 1, 1)$ ed è quindi del tipo

$$d = (a, b, -b).$$

Si ha

$$\begin{aligned} |d| &= \sqrt{a^2 + 2b^2} \\ |(1, -1, 1)| &= \sqrt{3} \\ \langle d, (1, -1, 1) \rangle &= a - b - b = a - 2b \end{aligned}$$

quindi l'equazione da imporre per ottenere le rette richieste è

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{a - 2b}{\sqrt{3}\sqrt{a^2 + 2b^2}} \\ \sqrt{a^2 + 2b^2} &= a - 2b \implies 2b(b - 2a) = 0 \end{aligned}$$

Le direzioni che ci interessano, a meno di costanti moltiplicative, sono

$$(1, 0, 0) \quad (-1, -2, 2).$$

Le due rette cercate sono quelle passanti per P e aventi queste direttrici.

Soluzione dell'esercizio 2

L'equazione parametrica della retta richiesta (in \mathbb{A}^3) è

$$\begin{cases} y_1 = 2t \\ y_2 = 2 - 2t \\ y_3 = 3 + t \end{cases} \implies \begin{cases} t = y_3 - 3 \\ y_1 = 2y_3 - 6y_2 = 2 - 2y_3 + 6 \end{cases}$$

da cui si ricava che la retta ha equazioni cartesiane (affini)

$$y_1 - 2y_3 + 6 = y_2 + 2y_3 - 8 = 0.$$

Per ricavare l'equazione cartesiana della chiusura proiettiva basta omogeneizzare: $x_1 - 2x_3 + 6x_0 = x_2 + 2x_3 - 8x_0 = 0$. La retta, essendo la chiusura proiettiva di una retta affine, interseca il piano π_∞ in un punto (quello che corrisponde alla sua direzione).

La matrice associata alla quadrica è

$$\begin{bmatrix} k & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -k \\ -1 & 0 & -k & -k \end{bmatrix}$$

e ha determinante $-k^3 - k^2 - k - 1 = -(k^2 + 1)(k + 1)$. Questo si annulla su \mathbb{R} se e solo se $k = -1$ quindi solo per questo valore la quadrica sarà degenere. Per $k = -1$ la matrice ha rango 3.

Applichiamo il metodo del completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_0x_2 + x_2^2 - 2x_0x_3 &= \\ &= x_1^2 + x_0^2 - x_0^2 - 2x_0x_2 + x_2^2 - 2x_0x_3 - x_3^2 + x_3^2 = \\ &= x_1^2 + (x_0^2 - 2x_0x_2 + x_2^2) - (x_0^2 + 2x_0x_3 + x_3^2) + x_3^2 = \\ &= x_1^2 + (x_0 - x_2)^2 - (x_0 + x_3)^2 + x_3^2 \quad (1) \end{aligned}$$

La proiettività

$$F : [x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_1, x_3, x_0 - x_2, x_0 + x_3]$$

ci permette di ridurre la quadrica \mathcal{C}_0 in forma canonica. Esplicitamente, se abbiamo

$$[X_0, X_1, X_2, X_3] = F([x_0, x_1, x_2, x_3]),$$

per i conti appena fatti avremo

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_0x_2 + x_2^2 - 2x_0x_3 &= [\dots] = \\ &= x_1^2 + (x_0 - x_2)^2 - (x_0 + x_3)^2 + x_3^2 = X_0^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_1^2 = \\ &= X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Si ha che F non è unica infatti basta comporla con una proiettività che manda la forma canonica in sé per ottenere una diversa mappa che trasforma \mathcal{C}_0 nella sua forma canonica. Ad esempio componendo la proiettività

$$G : [X_0, X_1, X_2, X_3] \mapsto [X_1, X_0, X_2, X_3]$$

con F si ottiene la proiettività

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_1, x_3, x_0 - x_2, x_0 + x_3] \mapsto [x_3, x_1, x_0 - x_2, x_0 + x_3].$$

Soluzione dell'esercizio 3

Siccome un prodotto è connesso (risp. compatto o T_2) se e solo se i suoi fattori lo sono abbiamo che Z è connesso (infatti \mathbb{R} è connesso e lo stesso vale per ogni spazio con la topologia banale) ma non compatto (perchè \mathbb{R} non è compatto) e non è T_2 (poichè Y non è T_2). In realtà Z non è nemmeno T_0 infatti ogni intorno aperto di $\{a\} \times \{0\}$ contiene anche $\{a\} \times \{1\}$ e vale il viceversa.

Dimostriamo che in uno spazio topologico T di Hausdorff, se K_1 e K_2 sono due compatti non disgiunti, la loro intersezione è compatta. Siccome T è uno spazio T_2 si ha che K_i è anche chiuso in T . Di conseguenza l'intersezione $K_1 \cap K_2$ è chiusa ed è contenuta in K_1 che è compatto (in uno spazio T_2): si ha quindi che $K_1 \cap K_2$ è compatto. Si noti che questa argomentazione non è valida per Z poichè non è T_2 .

Siano $a < b$ due numeri reali e sia

$$K := ((a, b) \times \{0\}) \cup ([a, b] \times \{1\}).$$

Vogliamo mostrare che K è compatto in Z . Definiamo $\tilde{K} := [a, b] \times Y$ e notiamo che \tilde{K} è compatto poichè i suoi fattori lo sono. Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di K . Mostriamo prima di tutto che \mathcal{U} copre anche \tilde{K} . Siccome \mathcal{U} è un ricoprimento esiste un aperto $U \in \mathcal{U}$ che contiene il punto $\{a\} \times \{1\}$. Gli aperti di Z sono quelli della topologia prodotto e Y ha la topologia banale: dunque anche il punto $\{a\} \times \{0\}$ appartiene a U . In modo analogo si dimostra che il punto $\{b\} \times \{0\}$ appartiene ad un aperto di \mathcal{U} ; quindi \mathcal{U} è un ricoprimento aperto anche per \tilde{K} che è compatto. Esiste perciò un sottoricoprimento finito di \mathcal{U} che copre \tilde{K} e, di conseguenza, anche K . Questo mostra che K è compatto.

Dimostriamo che in Z non è vero che intersezione di compatti è un insieme compatto. Ad esempio possiamo considerare i due insiemi

$$K_1 := ((a, b) \times \{0\}) \cup ([a, b] \times \{1\}) \quad K_2 := ([a, b] \times \{0\}) \cup ((a, b) \times \{1\}).$$

Questi sono compatti per quanto visto in uno dei punti precedenti. Tuttavia la loro intersezione coincide con

$$K_1 \cap K_2 = (a, b) \times Y$$

che non è compatto perchè è un prodotto di spazi non entrambi compatti.

Soluzione dell'esercizio 4

Si consideri la collezione $\mathcal{U} := \{U_n\}_{n \geq 1}$ con $U_n := B_{3-1/n}((0, 0))$. Per costruzione \mathcal{U} è un ricoprimento aperto di X ed è facile vedere che non esiste nessun sottoricoprimento finito di \mathcal{U} : X non è compatto.

Si considerino i punti $P = (0, 1)$ e $Q = (0, -1)$ (in alternativa si possono considerare due punti tali che $1 \leq |OP| = |OQ| < 3$). Questi sono punti di X e sono tali che ogni aperto di X che ne contiene uno, contiene anche l'altro: questo mostra che X non è T_0 e, di conseguenza, nemmeno T_1 .

Essendo la topologia di X più debole di quella euclidea su $B_3((0, 0))$ si ha che X è connesso poichè $(B_3((0, 0)), \tau_e)$ è connesso.

Siano $P, Q \in Y$ tali che $|OP| \leq |OQ|$. Dimostriamo che f è continua come funzione da $([0, 1], \tau_e)$ a Y , cioè che f è un arco continuo tra $f(0) = P$ e $f(1) = Q$. Gli aperti non vuoti di Y sono tutti e soli gli insiemi del tipo $A_r := B_r((0, 0)) \cap Y$ con $r \in (1, 3]$. La controimmagine di A_r rispetto a f è

$$f^{-1}(A_r) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } r \leq |OP| \\ [0, 1] & \text{se } |OP| < r \leq |OQ| \\ [0, 1] & \text{se } |OQ| < r \end{cases}$$

quindi si ha che per ogni aperto U di Y la controimmagine di U è aperta in $[0, 1]$. Risulta quindi che f è un arco continuo in Y che collega P e Q . Per l'arbitrarietà di P e Q abbiamo che Y è connesso per archi.

Sia $P = (x_0, y_0)$ un punto della corona circolare

$$C := X \setminus B_1((0, 0)) = \{P \mid |OP| \geq 1\}.$$

Gli intorni aperti di P sono del tipo $B_r((0, 0))$ con $r \in (\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, 3]$. In particolare ogni intorno aperto di P contiene tanto Z_1 e Z_2 e interseca Z_3 quindi P è un punto che appartiene alla chiusura (e alla frontiera) degli insiemi. Abbiamo mostrato quindi che $C \subset \overline{Z_i}$ per $i \in \{1, 2, 3\}$. Siccome un insieme è sempre contenuto nella sua chiusura avremo anche

$$(Z_i \cup C) \subseteq \overline{Z_i}.$$

L'insieme $B_1((0, 0)) \setminus Z_1$ è un aperto in X e quindi il suo complementare $Z_1 \cup C$ è un insieme chiuso. Avremo quindi

$$(Z_1 \cup C) \subseteq \overline{Z_1} \subseteq (Z_1 \cup C)$$

da cui ricaviamo $\overline{Z_1} = Z_1 \cup C$. Z_1 è un punto e non è un aperto, quindi il suo interno è l'insieme vuoto. Da questo ricaviamo che $C = \partial(Z_1)$. Siccome il complementare di Z_2 è C , si ha che Z_2 è denso in X : $\overline{Z_2} = X$. Z_2 è un aperto quindi il suo interno coincide con Z_2 e la sua frontiera, di conseguenza, è $\partial(Z_2) = C$. Per ogni punto di C^C siamo in grado di trovare $r > 0$ tale che $B_r(P) \cap C = \emptyset$ e questo mostra che ogni punto di C^C è esterno a Z_3

e che $\overline{Z_3} = C$. Nessun punto di Z_3 ha un intorno aperto contenuto in Z_3 quindi l'interno di Z_3 è il vuoto e la sua frontiera coincide con la sua chiusura. Riassumendo:

$$(Z_1)^o = \emptyset \quad \partial(Z_1) = \overline{Z_1} = C \cup \{(0,0)\}$$

$$(Z_2)^o = B_1((0,0)) \quad \partial(Z_2) = C \quad \overline{Z_2} = X$$

$$(Z_3)^o = \emptyset \quad \partial(Z_3) = \overline{Z_3} = C.$$