Esame scritto di Geometria 2

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
A.A. 2014/2015
Luglio 2015

Esercizio 1
Si consideri il piano affine reale $\mathbb{A}^2$ munito di un sistema di coordinate cartesiane (x,y) di centro O. Si consideri, al variare del parametro reale k, la conica di equazione

$$\mathscr{C}_k : -4x^2 + 8xy - 3x - 4y^2 + (k+4)y = 3.$$

- Scrivere la forma canonica della conica al variare di k;
- Posto $k = 1$, scrivere un'affinità che riduce a forma canonica la parabola $\mathscr{C}_1$;
- Scrivere, se possibile, un'affinità che trasforma $\mathscr{C}_1$ nella conica $\mathscr{D}$ di equazione $x + y^2 + 3 = 0$. In caso contrario, motivare la risposta.

Esercizio 2
Sia $\mathbb{P}^3$ lo spazio proiettivo reale e sia $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ un sistema di coordinate proiettive. Si considerino i seguenti sottospazi proiettivi:

$$S_1 : 2x_1 - x_2 + x_3 = x_2 - x_3 = 0,$$

$$S_2 : x_0 + x_1 - x_2 + x_3 = x_1 - x_0 = x_2 - 2x_0 - x_3 = 0,$$

$$S_3 : x_1 + x_3 = x_2 - x_0 = x_2 + x_1 = 0.$$

- Si ricavino le dimensioni di S_1, S_2, S_3 e $S_1 \cap S_2$;
- Si scrivano delle equazioni cartesiane per $T = < S_1, S_2 >$, il più piccolo spazio proiettivo contenente S_1 e S_2;
- Ricavare $U = < S_1, S_2, S_3 >$, il più piccolo spazio proiettivo contenente S_1, S_2 e S_3.

Esercizio 3

Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathscr{P}(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{A}_1 = \{(a,b)\,|\,a<b \text{ e } \mathbb{Z}\cap(a,b)=\emptyset\} \quad \text{e} \quad \mathscr{A}_2 = \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n-\varepsilon, n+\varepsilon)\,|\,\varepsilon>0 \right\}.$$

- Si dimostri che $\mathscr{B} := \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ è una base per una topologia τ su $\mathbb{R}$. In quanto segue si indichi con X lo spazio topologico $(\mathbb{R},\tau)$;
- Si dica se X è T_1 o connesso;
- Ricavare la chiusura di $\{9/4\}$ e di $\{0\}$ in X.

Esercizio 4

Si considerino i sottospazi topologici X, Y e W di $\mathbb{R}^2$ (munito della topologia euclidea) definito da

$$X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,y\geq 2\}, Y = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,y-x^2\geq 2\}$$

$$W = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,(x-3)(y-2)\geq 1\}$$

e $\mathbb{Z}$ visto come sottospazio topologico di $(\mathbb{R},\tau_e)$. Sia $f: W\to\mathbb{Z}$ una qualsiasi funzione continua.

- Si dica quali spazi, tra X, Y e W sono omeomorfi tra loro. Se ce ne sono due omeomorfi esibire un omeomorfismo;
- Si dica quali valori può assumere la cardinalità dell'immagine di f facendo un esempio per ogni caso possibile.

Soluzione dell'esercizio 1
La matrice rappresentativa della conica è

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3/2 & k/2+2 \\ -3/2 & -4 & 4 \\ k/2+2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

e soddisfa

$$\mathrm{Det}(A) = k^2 + 2k + 1 :$$

la conica è degenere se e solo se $k = -1$. Il determinante di A_0, la matrice dei termini quadratici, è invece nullo per ogni valore di k. Abbiamo quindi che $\mathscr{C}_k$ è una parabola per $k \neq -1$ con forma canonica $y - x^2 = 0$. Se $k = -1$ la matrice A ha rango 2 (infatti il minore $A_{3,3}$ è diverso da 0). La conica è quindi una parabola degenere. Provando a ridurre con il metodo di completamento dei quadrati si vede che l'equazione di $\mathscr{C}_{-1}$ si può scrivere come

$$4(x-y)^2 + 3(x-y) + 3 = 0$$

che dopo un cambio di coodinate diventa

$$4X^2 + 3X + 3 = 0.$$

Con questa scrittura è evidente che $\mathscr{C}_{-1}$ è una parabola degenere a punti non reali la cui forma canonica è quindi

$$x^2 + 1 = 0.$$

Poniamo $k = 1$ e cerchiamo di ridurre $\mathscr{C}_1$ a forma canonica. La seguente catena di uguaglianze

$$-4x^2 + 8xy - 3x - 4y^2 + 5y - 3 = -4(x^2 - 2xy + y^2) + 5y - 3x - 3 = -(2(x-y))^2 + (5y - 3x - 3)$$

suggerisce il seguente cambio di coordinate

$$f : \begin{cases} X = 2(x-y) \\ Y = -3x + 5y - 3 \end{cases}$$

che rappresenta un'affinità in quanto la matrice $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ ha determinante diverso da 0. Tramite questo cambio di coordinate abbiamo quindi che la parabola si scrive come $Y = X^2$: è ridotta in forma canonica.

L'affinità esiste poichè le due coniche hanno la stessa forma canonica essendo entrambe parabole. La conica $\mathscr{D}$ ha equazione $x + y^2 + 3 = 0$ che si può scrivere nella forma

$$-(x+3) = y^2.$$

Di conseguenza, l'affinità

$$g : \begin{cases} X = y \\ Y = -x - 3 \end{cases}$$

riduce l'equazione di $\mathscr{D}$ nella forma $Y = X^2$: è un'affinità che permette di mandare la parabola nella sua forma canonica $\mathscr{C}$, la stessa di $\mathscr{C}_1$. Di conseguenza

$$g^{-1} : \begin{cases} x = -Y - 3 \\ y = X \end{cases}$$

consente il passaggio dalla forma canonica $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ e

$$g^{-1} \circ f : \begin{cases} x' = -(-3x+5y-3)-3 = 3x-5y \\ y' = 2(x-y) = 2x-2y \end{cases}$$

è un'affinità che trasforma $\mathscr{C}_1$ in $\mathscr{D}$.

Soluzione dell'esercizio 2

Le due equazioni che definiscono S_1 sono indipendenti quindi S_1 ha dimensione 1: è una retta in $\mathbb{P}^3$. Le tre equazioni che definiscono S_2 sono invece dipendenti: si ha infatti che

$$-(x_0+x_1-x_2+x_3)+(x_1-x_0) = x_2-2x_0-x_3$$

da cui deduciamo che le ultime due equazioni (che sono indipendenti) descrivono S_2 anche senza la terza equazione. Di conseguenza anche S_2 è una retta e ha dimensione 1. Le tre equazioni che definiscono S_3 sono invece indipendenti: S_3 ha dimensione 0 ed è un punto (per la precisione di tratta del punto $[1,-1,1,1]$). Per ricavare la dimensione di $S_1 \cap S_2$ mettiamo a sistema le equazioni che li definiscono:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3 = 0 \\ x_2-x_3 = 0 \\ x_1-x_0 = 0 \\ x_2-2x_0-x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_0 \\ 2x_1-x_2+x_3 = 0 \\ x_2-2x_0-x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_0 \\ 2x_1 = 0 \\ 2x_0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Questo basta per concludere che $S_1 \cap S_2$ è il punto $P = [0,0,1,1]$ e quindi ha dimensione 0.

Dalla formula di Grassmann abbiamo che $\mathrm{Dim}(T) = 1+1-0 = 2$: T è un piano. Ricaviamoun punto che stia su S_1 ma non su S_2 e uno che stia su S_2 ma non su S_1. Ad esempio i punti

$$P_1 := [1,0,1,1] \qquad P_2 := [1,1,1,-1]$$

soddisfano questa richiesta. Per costruzione P, P_1 e P_2 sono indipendenti quindi generano il piano T. Delle equazioni per T si possono ottenere chiedendo che il rango di

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

non sia massimo: basta chiedere che il determinante di A sia 0.

$$0 = \det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\right) = \pm\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \pm\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ x_1 & x_2-x_3 & x_3 \end{bmatrix}\right) = \pm\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x_1 & x_2-x_3 \end{bmatrix}\right) = x_2-x_3-2x_1.$$

Un'equazione cartesiana per il piano T è quindi $x_2-x_3-2x_1 = 0$.

Ricordando che $S_3 = [1,-1,1,1]$, possiamo controllare se S_3 appartiene a T sostituendone le coordinate nell'equazione di T: $1-1-2 \neq 0$ da cui deduciamo che $S_3 \cap T = \emptyset$. Questo vuol dire che $U = < S_1, S_2, S_3 > = < T, S_3 > = \mathbb{P}^3$ (e ha dimensione 3).

Soluzione dell'esercizio 3
Tutto lo spazio si scrive come unione di elementi di $\mathscr{B}$ infatti $\mathbb{R}$ stesso è un elemento di $\mathscr{B}$ ($\mathbb{R} \in \mathscr{A}_2$). Si vede facilmente che l'intersezione di elementi di $\mathscr{B}$ è ancora in $\mathscr{B}$. Ad esempio si può notare che se $A_i \in \mathscr{A}_1$ e $B_i \in \mathscr{A}_2$ allora $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{A}_1$, $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{A}_2$ e $A_1 \cap B_1 \in \mathscr{A}_1$.

Mostriamo che X non è T_1: ad esempio mostriamo che la chiusura di $\{0\}$ deve contenere $\mathbb{Z}$. Sia $a \in \mathbb{Z}$ e supponiamo, per assurdo, che $a \notin \overline{\{0\}}$. Allora $a \in \overline{\{0\}}^C$ che è un aperto. Ma ogni aperto che contiene un intero deve contenere tutto $\mathbb{Z}$. Quindi otteniamo l'assurdo: $\overline{\{0\}}^C$ contiene $\mathbb{Z}$ ma non 0. Non essendo chiuso $\{0\}$ avremo che X non è T_1. Siccome la topologia τ è meno fine di quella euclidea avremo che $X = (\mathbb{R}, \tau)$ è connesso poichè anche $(\mathbb{R}, \tau_e)$ lo è.

Siccome

$$A := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n - 1/4, n + 1/4) \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{3\}} (n, n+1) \right) \cup (9/4, 3)$$

è unione di elementi di $\mathscr{B}$ è un aperto. Poichè $A^C = \{9/4\}$ abbiamo che la chiusura di $\{9/4\}$ è $\{9/4\}$. Abbiamo già visto che la chiusura di $\{0\}$ deve contenere $\mathbb{Z}$. Mostriamo che $\mathbb{Z}$ è chiuso (e che quindi coincide con la chiusura di $\{0\}$). Per farlo basta osservare che

$$\mathbb{Z}^C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$$

è unione di elementi di $\mathscr{B}$.

Soluzione dell'esercizio 4
Il luogo $(x-3)(y-2) = 1$ è un'iperbole e W è l'unione di

$$W \cup \{x > 3, y > 2\} \quad \text{e} \quad W \cup \{x < 3, y < 2\}$$

che rappresenta anche una decomposizione di W come unione di due aperti propri disgiunti di W: questo dimostra che W è sconnesso. X invece è connesso in quanto è prodotto cartesiano di spazi connessi. Di conseguenza, X e W non sono omeomorfi. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} g: & X & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x, y + x^2) \end{array}$$

che è continua poichè le composizioni con le proiezioni sui fattori di $\mathbb{R}^2$ sono polinomi (e quindi sono continue come applicazioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$). Mostriamo che $g(X) = Y$. Il punto $P = (x_P, y_P)$ appartiene a X se e solo se $y_P \geq 2$. L'immagine di P tramite g è un punto di coordinate $(x_P, y_P + x_P^2)$ e questo punto appartiene a Y se e solo se $(y_P + x_P^2) - (x_P)^2 \geq 2$ cioè se e solo se $y_P \geq 2$ cioè se e solo se P appartiene a X.

L'applicazione h tale che $(x,y) \in Y \mapsto (x, y - x^2) \in \mathbb{R}^2$ è anch'essa continua e si vede facilmente che $h \circ g = \mathrm{Id}_X$ e $g \circ h = \mathrm{Id}_Y$ (cioè f e g sono biettive e continue). Siccome $g(X) = Y$ abbiamo che g è un omeomorfismo da X a Y. Di conseguenza X è omeomorfo a Y e W non è omeomorfo a X (e a Y).

La topologia su $\mathbb{Z}$ è quella discreta infatti ogni punto è aperto:

$$\{n\} = (n-1, n+1) \cap \mathbb{Z}.$$

Sia $f : X \to \mathbb{Z}$ una qualsiasi funzione continua. Siccome l'immagine di un connesso è un connesso avremo che le due componenti connesse W_1 e W_2 di W avranno entrambe immagine contenuta in una delle componenti connesse di $\mathbb{Z}$: i punti di $\mathbb{Z}$ (perchè la topologia su $\mathbb{Z}$ è quella discreta). Abbiamo appena mostrato che $f(W_i) = \{n_i\}$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ eventualmente coincidenti. Quindi la cardinalità di $F(X)$ è 1 o 2 a seconda che sia $n_1 = n_2$ o meno.