# MATEMERCATO:
# MATEmatica in MOSTRA al MERCATO
Comunicazione della scienza

E. Busana, A. Fabian, F. Turri

# Capitolo 1

# Introduzione

La prima questione che abbiamo affrontato per questo progetto è stata la scelta dell'ambito scientifico che volevamo trattare. Abbiamo deciso di occuparci di argomenti matematici, innanzitutto per il fatto che questa è la materia di cui ci occupiamo, che conosciamo meglio e che più ci piace. Pensiamo che queste motivazioni ci spingano a essere più creative e innovative. Sosteniamo, inoltre, che la realtà presenti un residuo matematico, una sorta di ricordo che noi dobbiamo scoprire, anche se non bisogna supporre che tutto si riduca alla matematica. Esiste sempre qualcosa che ci sfugge in cui la matematica non è coinvolta. La matematica può aiutare certamente a descrivere problemi e a costruire modelli, ma non può dare delle spiegazioni dei perché.

Apprezziamo molto il fatto che la matematica sia un linguaggio universale, supera ogni barriera linguistica e culturale, ma nonostante ciò come le altre scienze è spesso limitata a un numero ridotto di persone. Con questo progetto vorremmo far conoscere a molte persone la bellezza della matematica. Vogliamo seguire l'insegnamento di Emma Castelnuovo, insegnante e matematica italiana che ha dato dei significativi contributi alla didattica della matematica, che proponeva di *"Vedere oltre le figure e i numeri"* e che sosteneva che *"La matematica viaggia per scoperte, per riflessioni; la matematica attiva, che nasce dalla realtà, non quella ostile, basata sui tecnicismi e purtroppo ancora così diffusa"*.

# Capitolo 2

# Questionari

Prima di iniziare il nostro progetto abbiamo pensato di coinvolgere fin da subito il pubblico somministrando un questionario che mettesse in luce gli interessi matematici e i punti di vista dell'uomo medio. Le finalità sono state innanzitutto la raccolta di informazioni riguardanti le tematiche matematiche che generano maggiore curiosità e la modalità di comunicazione preferita. In secondo luogo il questionario è stato un mezzo fondamentale per avere un contatto diretto con persone estranee al mondo scientifico e non. Durante la compilazione dei questionari la persona coinvolta si è interrogata su questioni matematiche che solitamente non vengono considerate, questo ha generato curiosità e interesse nei confronti degli argomenti proposti e in certi casi i questionari si sono rivelati un input per approfondimenti individuali. Noi, invece, abbiamo testato concretamente cosa significa spiegare dei concetti matematici senza l'ausilio di un linguaggio tecnico. Sono emerse alcune difficoltà di comunicazione e di volta in volta, tenendo conto delle esperienze precedenti, abbiamo migliorato il nostro approccio nei confronti dell'altro raggiungendo sempre maggiore efficacia comunicativa. Tutto ciò che abbiamo appreso in questa fase è stato poi fondamentale per la progettazione del nostro lavoro. La stesura del questionario è stata pianificata e studiata in maniera attenta consultando dei testi guida. Abbiamo preferito essere sintetici utilizzando parole-chiave per non tediare l'interlocutore. Abbiamo ritenuto importante chiedere l'età e il percorso formativo per comprendere come questi si legano con l'interesse per la matematica e per i diversi argomenti proposti. Sia per le tematiche che per la modalità comunicativa non abbiamo imposto vincoli riguardo al numero di scelte da effettuare. Abbiamo tentato di sottoporre il questionario ad un pubblico il più possibile eterogeneo sia rispetto all'età che alla formazione cercando quindi di ottenere risultati che si avvicinino maggiormente alla realtà.

Abbiamo pensato di proporre alcuni argomenti curiosi che solitamente non si trattano durante il percorso scolastico e che ci interessavano particolarmente. Abbiamo posto attenzione a tematiche matematiche collegate alla realtà, per esempio proponendo matematica e natura, codici e crittografia e matematica di tutti i giorni. Oltre a queste abbiamo considerato anche storia della matematica, matematica per le culture non europee e matematica nell'arte. Per quanto riguarda le modalità comunicative abbiamo proposto tutte le possibilità alla nostra portata.

**QUESTIONARIO**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Età: ____________

Studi:

- ☐ Scientifici
- ☐ Umanistici
- ☐ Sociali

Professione ______________________________________________

Interesse per la matematica :

- ☐ Sì
- ☐ No

Ambito matematico di cui si vorrebbe conoscere qualcosa:

- ☐ Storia della matematica
- ☐ Matematica e natura (spirali, successione di Fibonacci..)
- ☐ Matematica per le culture non europee (Cina, India..)
- ☐ Matematica innata (il concetto di numero è presente già nei bambini? E negli animali?)
- ☐ Matematica tutti i giorni (per le strade delle città..)
- ☐ Matematica e i giocolieri
- ☐ Matematica nell' arte
- ☐ Codici e crittografia
- ☐ Altro……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Modalità di informazione preferita:

- ☐ Conferenza
- ☐ Libro, rivista, giornale
- ☐ Blog, internet
- ☐ Mostra
- ☐ Laboratorio interattivo
- ☐ Altro……………………………………………………………………………………………

Figura 2.1: Questionario

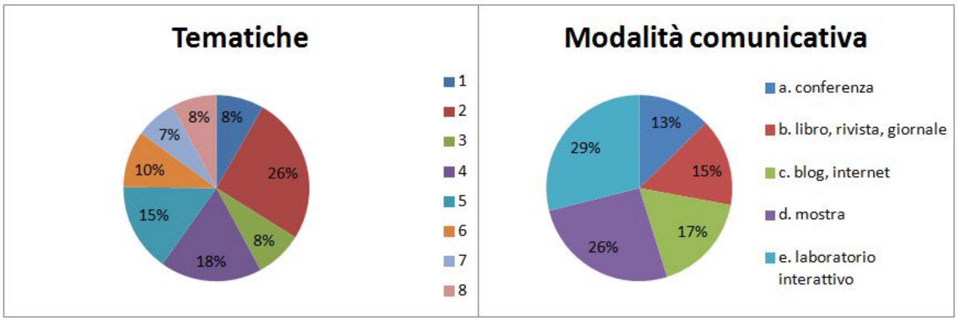
Abbiamo raccolto 150 questionari che abbiamo analizzato con attenzione. Dal questionario è emerso che il 63% delle persone coinvolte dimostra interesse per la matematica e questo dato rispecchia pienamente il fatto che questa disciplina sia considerata difficile, astratta, inutile e lontana dalla vita quotidiana. Questo è uno dei tanti motivi per cui abbiamo deciso di comunicare alcuni aspetti di questa materia.

Per quanto riguarda le tematiche e le modalità comunicative apprezzate abbiamo raccolto i seguenti dati:

| Tematiche | Pref. |
|---|---|
| 1)Storia della matematica | 21 |
| 2)Matematica e natura | 65 |
| 3)Matematica per le culture non europee | 21 |
| 4)Matematica innata | 45 |
| 5)Matematica tutti i giorni | 39 |
| 6)Matematica e giocolieri | 25 |
| 7)Matematica nell'arte | 18 |
| 8)Codici e crittografia | 20 |

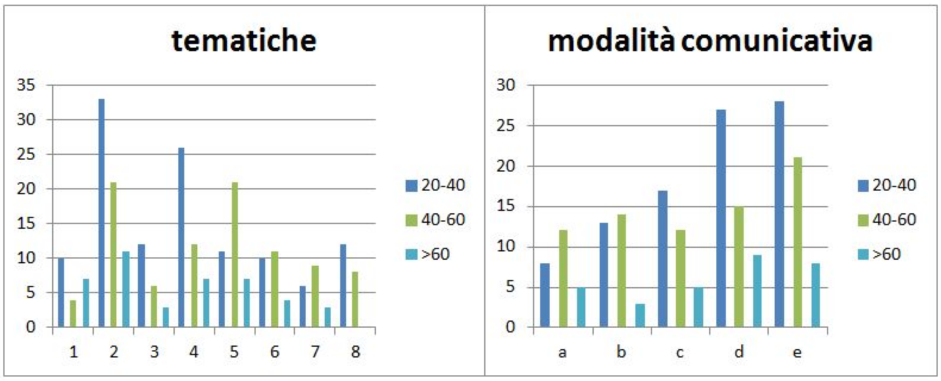
| Modalità comunicative | Pref. |
|---|---|
| a)Conferenza | 25 |
| b)Libro, rivista, giornale | 30 |
| c)Blog, internet | 34 |
| d)Mostra | 51 |
| e)Laboratorio interattivo | 57 |

Gli argomenti che hanno riscosso maggiore interesse sono stati matematica e natura (26%), seguita da matematica innata (18%) e infine matematica tutti i giorni (15%). Le modalità preferite sono state mostra (26%) e laboratorio interattivo (29%) come si può vedere nei seguenti grafici:

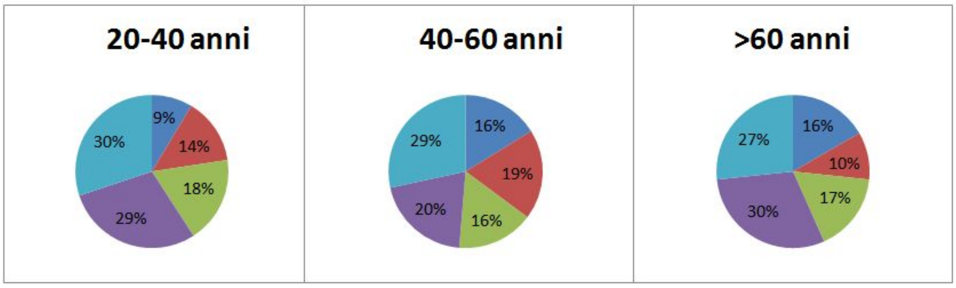


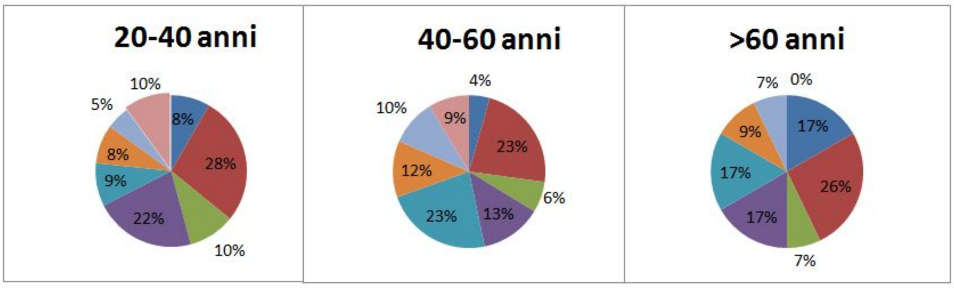

Nella compilazione del questionario abbiamo richiesto l'età, infatti il nostro intento era quello di comunicare argomenti matematici a un pubblico vasto comprendente diverse fasce d'età. Nei seguenti grafici compaiono le tematiche e le modalità comunicative in relazione al numero di persone suddivise per età. Abbiamo considerato 20-40, 40-60, oltre 60 anni.

In particolare, gli individui appartenenti alla fascia 20-40 hanno privilegiato l'argomento matematica e natura seguito da matematica innata e le modalità preferite sono state mostra e laboratorio interattivo.




Anche se con percentuali diverse, le scelte predominanti della fascia 40-60 sono state come le precedenti. Gli over 60 hanno dimostrato maggiore interesse per matematica e natura seguita in percentuali quasi uguali da storia della matematica, matematica innata e matematica tutti i giorni. Per quanto riguarda le modalità comunicative risultano predominanti laboratorio interattivo e mostra.




Nel questionario compariva anche la voce 'altre tematiche' e abbiamo raccolto le seguenti proposte: statistica e probabilità, teoria dei numeri e teoria dei giochi. Esse ci sono state comunicate da parte di persone interessate e aventi un percorso scientifico alle spalle.

# Capitolo 3

# Perché una mostra?

Abbiamo dedicato molto tempo alla ricerca di un'idea che esprimesse al meglio gli argomenti che volevamo trattare e che rispettasse alcuni punti principali che ci siamo prefissate. Abbiamo deciso di progettare una mostra a carattere divulgativo e didattico, poiché vogliamo comunicare la bellezza di alcuni argomenti matematici ad un pubblico piuttosto ampio e variegato. Solitamente la matematica viene percepita in maniera negativa da molte persone poiché risulta spesso "difficile" e estremamente astratta. Vogliamo pertanto offrire un'immagine attraente della matematica come disciplina piena di fantasia e creatività e per fare ciò proporremo diverse attività con oggetti e meccanismi matematici. Uno dei nostri obiettivi è quello di generare attrazione, interesse e curiosità nei confronti di una materia considerata spesso arida, che però si lega fortemente alla realtà della vita. La matematica, che molti considerano gelida ed altezzosa, non fa solo paura: chi ha l'occasione di conoscerla scopre un mondo meraviglioso, affascinante, creativo, formativo, nel quale è possibile discutere, interpretare e costruire attivamente, finendo in questo modo con l'entrarne in simbiosi ed amarla. Questo sarebbe il nostro ambizioso obiettivo. Vogliamo proporre la matematica, cercando di renderla trasparente e semplice, evitando di banalizzarla e pensiamo che la pratica di far cadere dall'alto una "dottrina" generalissima e preformata incarni un atteggiamento antididattico e anticomunicativo.

> La matematica è un compito educativo per menti che devono crescere, diventare adulte e pienamente umane. *Hans Freudenthal*

Sosteniamo che l'apprendimento debba essere una reinvenzione attiva da parte dei soggetti e quindi la comunicazione si dovrebbe configurare come una guida di questa reinvenzione. La mostra deve contribuire allo sviluppo educativo dei bambini da un lato, dall'altro deve incoraggiare e stimolare giovani e adulti alla conoscenza. Poniamo particolare attenzione al fatto che il visitatore assuma un ruolo attivo durante la mostra e per questo proponiamo dei laboratori interattivi finalizzati al raggiungimento di alcuni obiettivi, tipici del fare ricerca in matematica, che possiamo così riassumere:

- costruzione del proprio sapere;
- comunicazione delle proprie scoperte;
- interiorizzazione delle nozioni apprese.

Tra gli obiettivi che vogliamo perseguire vi è quello di far pensare l'osservatore, facendogli studiare i problemi e non le risposte ad essi. Ci proponiamo di non esporre in maniera esaustiva tutti i contenuti matematici ma lasciare in sospeso alcune questioni in modo da suscitare interesse e curiosità nel visitatore. Auspichiamo che egli vada ad approfondire gli argomenti esposti dopo che ha concluso il percorso della mostra. Abbiamo proposto molteplici attività pratiche perché pensiamo che la conoscenza debba passare attraverso il "fare qualcosa", infatti sosteniamo che i fatti generino l'apprendimento come scritto:

SE ASCOLTO DIMENTICO,
SE GUARDO IMPARO,
SE FACCIO CAPISCO.

Diamo molta importanza all'impatto emotivo, infatti esso è preponderante rispetto all'impatto razionale. I visitatori dovrebbe divertirsi, sorprendersi nelle attività pratiche proposte, sviluppare la creatività, sperimentando con mano la materia, in modo da apprendere la matematica in maniera piacevole e con meno difficoltà. Alcune esperienze laboratoriali e giochi verranno svolte in gruppo e grazie alla collaborazione tra i componenti e ai liberi tentativi di risposta, i visitatori giungeranno autonomamente ad acquisire alcune conoscenze di base. È importante che gli osservatori diano le risposte a cui sono giunti, anche se sbagliate. Infatti è molto meglio partire da qualcosa di sbagliato ma che è scaturito dai loro ragionamenti piuttosto che mettere loro in testa le nostre risposte (se le dimenticherebbero a breve!). Inoltre è proprio nel momento in cui si rielaborano le conoscenze per comunicarle che queste vengono interiorizzate e comprese a fondo. Proponiamo i laboratori attivi anche per far riscoprire al pubblico il gusto della manualità che nella società attuale è spesso sottovalutata. La mostra ci permetterà di trattare vari ambiti della matematica a partire dalla geometria, all'algebra, all'analisi proponendo alcuni "assaggi" di matematica e facendo così capire al pubblico che questa non è una disciplina monolitica, ma che presenta, al contrario, molteplici sfaccettature, e che usa linguaggi e metodi diversi anche se collegati tra loro. In matematica è difficile trovare degli argomenti attuali, nuovi che hanno a che fare con tematiche del momento, abbiamo pensato di considerare dei temi della vita quotidiana e della natura che ci circonda. Vogliamo sottolineare che la matematica è presente ovunque e che, anche se si fa fatica a credere, è importante e si applica a moltissimi ambiti della vita, tra cui la segretezza nelle telecomunicazioni e altro. L'importante è che le persone acquisiscano o affinino la capacità di descrivere la realtà e, in un certo senso, di "raccontare la matematica": questa abilità è un passaggio fondamentale dell'apprendimento, successivo alla fase di osservazione, e che non ne è automatica conseguenza. In generale, l'aver capito i concetti, le proprietà, le "regole del gioco" non si traduce automaticamente in una facilità nel descrivere tutto ciò agli altri: per raggiungere questo obiettivo occorre insistere con attività che siano a ciò esplicitamente finalizzate. In particolare ciò vale in campo matematico, dove l'aspetto della descrizione e del linguaggio diventa cruciale. Per la mostra vogliamo adottare un linguaggio semplice in modo che i concetti trattati vengano compresi anche dai "non addetti ai lavori", cioè persone che non presentano delle competenze scientifiche approfondite. Prevediamo un'attività di mediazione, per cercar di rendere accessibili gli argomenti scientifici, evitando da un lato di trattare concetti estremamente astratti e complessi e dall'altro lato di renderli troppo semplici trasmettendo così misconcezioni. Siamo consce di questa difficoltà. Gli argomenti verranno affrontati secondo vari livelli di difficoltà e approfondimento. Alcune attività sono particolarmente indicate per i bambini, altre invece per un pubblico adulto. La mostra, inoltre, è uno strumento importante per produrre legami e relazioni tra le persone; infatti permette di includere tutti, non solo i più brillanti, non lasciando indietro gli ultimi. Essa non è solo un luogo dove si impara ma anche il luogo per conoscere, per socializzare, unendo quindi intrattenimento ed educazione. Vogliamo, attraverso questo progetto, promuovere i contatti interculturali, facendo attenzione anche ai nuovi arrivi (immigrati).

# Capitolo 4

# Perché il mercato?

Passeggiando per il mercato/fiera di Trento ci siamo accorte di quanta 'matematica' ci circonda. Abbiamo pensato quindi di creare una sorta di mostra che vada a riprodurre le diverse bancarelle del mercato. Originariamente pensavamo di affiancarle alle bancarelle già esistenti in occasione dell'appuntamento settimanale. Moltissime persone (di ogni età, professione...), infatti, girando per il mercato si potrebbero in questo modo imbattere nelle meraviglie della matematica che spesso ignorano. Volevamo comunicare a persone anche non necessariamente interessate, quanto la matematica sia ovunque). Essendo questo piuttosto complesso, si potrebbe riprodurre il mercato in un'area dedicata a mostre.

Le bancarelle principali riguarderebbero:

- **fiori e piante:** simmetrie, spirali, sezione aurea;
- **frutta e verdura:** spirali, numeri di Fibonacci, impacchettamento;
- **dolciumi:** frattali, numeri poligonali;
- **vestiti:** topologia, codici a correzione d'errore;
- **altre.**

La mostra dovrà riprodurre il mercato nella sua quotidianità, in questo modo il visitatore si sentirà a proprio agio in un ambiente abituale e quindi sarà incuriosito e incoraggiato a mettersi in gioco. Riteniamo che sia importante proporre l'idea del mercato poiché l'interesse del pubblico, per le cose trattate, è tanto maggiore quanto più esse si avvicinano alla realtà. Non proponiamo dei meccanismi spettacolari, costosi e difficili da reperire, ma, al contrario, utilizzeremo oggetti semplici, della vita quotidiana, ma che racchiudono tutta la bellezza della matematica. Proprio per queste caratteristiche, la mostra può essere riprodotta all'interno di istituti scolastici, piazze, o ambienti pubblici adibiti a mostre. Alcuni laboratori e alcune parti espositive possono essere presentati indipendentemente dalla totalità della mostra, infatti essa è molto versatile. Abbiamo pensato anche di progettare la mostra semplificando al massimo la realizzazione utilizzando materiali abituali e poveri, cercando così di economizzare. Le diverse bancarelle previste verranno collocate all'interno di un'area adibita ad esse. Non prevediamo la creazione di un percorso obbligatorio, ma sarà il visitatore a scegliere l'ordine con cui veder le bancarelle. In questo modo lasciamo la totale libertà al visitatore, in modo che egli segua il gusto personale. In ogni bancarella abbiamo previsto una parte espositiva e una parte interattiva e di laboratorio. Per quanto riguarda la prima abbiamo pensato di mostrare oggetti matematici particolari che generino stupore e curiosità nell'osservatore. Vogliamo esprimere e descrivere i concetti matematici più importanti ad essi collegati utilizzando i cartellini dei prezzi. Questi mostreranno spiegazioni sintetiche e dirette in modo da non annoiare il pubblico. La parte interattiva sarà formata da attività pratiche, giochi e laboratori a cui dedichiamo uno spazio particolare per le motivazioni esposte precedentemente. Anche per questa parte sono previsti pannelli espositivi in forma scritta o multimediali sui quali vi saranno le istruzioni all'uso. Le due parti saranno mescolate tra di loro, in modo da far sperimentare al visitatore un'esperienza piacevole senza annoiarlo. È fondamentale, inoltre, per entrambe le parti, la presenza di una persona fisica che spiega al visitatore ciò che si trova davanti. In analogia a ciò che avviene al mercato non ci sarà una guida che accompagna i visitatori lungo tutto il percorso ma ad ogni bancarella corrisponderà un venditore di conoscenze, che illustrerà i diversi concetti e sarà di supporto alle diverse attività. Durante lo svolgimento del laboratorio la guida ha il compito di sorvegliare le attività dei vari gruppi, garantendo una generale situazione di equilibrio. Può certamente sciogliere dubbi o fornire chiarimenti 'sulle regole del gioco', sottolineare i problemi che scaturiscono dai ragionamenti e magari porre domande-stimolo suscitate proprio dai dibattiti in corso all'interno del gruppo, ma è bene che non dia risposte o suggerimenti, in modo che i visitatori giungano autonomamente alle soluzioni. Le guide nelle diverse postazioni devono essere persone con buone conoscenze scientifiche, talentuose, informate sui diversi linguaggi di comunicazione e che sappiamo approcciarsi ad un pubblico estremamente eterogeneo. Come dice il seguente aforisma:

> Colui che non sa insegnare le cose che conosce,
> conosce per sé, non per gli atri;
> costui va considerato come uno che non sa niente.

Un altro aspetto per noi fondamentale è il fatto che il divulgatore sappia esprimere la passione per gli argomenti trattati. Sosteniamo infatti che il successo di una mostra dipenda in buona parte da come queste persone comunicano la materia.

Abbiamo dato alle diverse attività e parti espositive dei titoli ironici e divertenti per attirare l'attenzione e rendere la trattazione più divertente.

# Capitolo 5

# Bancarella dei fiori

Le piante, e più in generale l'intero mondo vegetale, offrono molteplici spunti matematici. Considerando la bancarella delle piante e dei fiori andremo a trattare le simmetrie facendo uso di specchi, la sezione aurea, le spirali e nuovamente la successione di Fibonacci che è molto frequente in natura.

## 5.1 Specchio specchio delle mie brame ... chi è la pianta più simmetrica del reame?

Questa attività è particolarmente indirizzata a studenti di ogni ordine di scuola, da quella dell'infanzia all'università ma essa può risultare molto interessante anche per il pubblico adulto. Le simmetrie, infatti, possono essere studiate a livelli di approfondimento molto diversi, essendo un concetto piuttosto profondo in matematica che rappresenta uno strumento di analisi e di interpretazione della realtà. Vorremmo indurre il visitatore a riconoscere, con occhio critico, alcune caratteristiche che si ripetono con una certa regolarità nelle piante e che permette di classificarle secondo dei modelli matematici. Se si osservano attentamente i vegetali si nota che diverse strutture sono identificabili utilizzando dei criteri di tipo matematico per esempio la simmetria. Molti fiori hanno piani di simmetria o assi di rotazione di ordine 3, 4, 5..., mentre altri, a prima vista, sembrano essere governati dal disordine anche se questo è solo apparente. Anche molti tipi di foglie possiedono una forma regolare ed è possibile immaginare una sorta di 'specchio' che le divide in due metà, una speculare all'altra. Anche le strutture interne, osservabili con un microscopio, rivelano una ricca presenza di elementi che si ripetono dando luogo a regolarità geometriche. Abbiamo pensato, per facilitare la comprensione della teoria geometrica che sta alla base di queste considerazioni, di utilizzare uno strumento concreto che aiuti a visualizzare le simmetrie ovvero lo specchio. L'obiettivo principale di questa fase del percorso è quello di portare i visitatori a distinguere due diversi tipi di simmetrie:

- la simmetria di riflessione (la più semplice): avviene quando una figura ammette un asse di simmetria ovvero quando esiste una retta tale che la riflessione rispetto a quest'ultima manda la figura in se stessa;
- la simmetria di rotazione: avviene quando una figura ammette un centro di simmetria cioè quando esistono un punto e un'opportuna rotazione intorno a quel punto tale che la figura viene mandata in se stessa.

Non è necessario durante l'attività che i visitatori conoscano le definizioni specifiche di asse e centro di simmetria, infatti, il gioco con gli specchi è estremamente intuitivo. Chiediamo all'osservatore di utilizzare gli specchi per testare la presenza o meno di un asse di riflessione nelle piante/fiori a disposizione e ciò porterà a suddividere le figure in due categorie:

- quelle per cui è possibile individuare una posizione dove collocare lo specchio in modo che la parte di figura che resta visibile, insieme alla sua immagine riflessa, ricostruisca la figura intera;
- quelle per cui non è possibile fare tutto ciò.

Non sempre però è possibile tagliare a metà l'oggetto di studio, (soprattutto se si tratta di un vegetale); conviene allora utilizzare un'immagine virtuale, fare una fotografia (con un opportuno punto di vista) e farla scorrere sotto la fessura alla base di uno specchio cercando, se esiste, una qualche posizione che permetta di ricreare l'intera figura. Con uno specchio singolo è possibile verificare la presenza della simmetria in tutti quegli organismi vegetali che hanno un unico piano che li divide in due metà speculari, come ad esempio il tulipano, la foglia del fico, la margherita.

Figura 5.1: Fiori e foglie allo specchio

Nel caso di piante con più di un asse di simmetria, è necessario utilizzare degli specchi incidenti di differente ampiezza con angoli di 36, 60, 90 gradi che forniremo. Vogliamo che il pubblico testi concretamente quali siano le simmetrie di alcuni fiori utilizzando gli strumenti in dotazione. Proponiamo come esempio esplicativo quello del fiore di melo: per riottenere il fiore nella sua totalità, è necessario dividere il petalo a metà e inserirlo tra due specchi incidenti che formano un angolo di 36 gradi. È necessario prendere questo angolo poiché il fiore del melo presenta 5 petali ognuno con un asse di simmetria. Utilizzando gli specchi con l'angolo appropriato si riproduce 5 volte il petalo completo arrivando a 360 gradi. Facendo questa operazione è possibile verificare che l'immagine riflessa negli specchi è quasi uguale all'immagine completa del fiore reale. Faremo comparare l'immagine ottenuta dalla riflessione con quella del fiore reale per vedere se il procedimento seguito è stato effettuato correttamente.

Figura 5.2: Fiori con assi di simmetria particolari

Con questa attività ci siamo proposte di cercare di mostrare al pubblico che alla base della natura vi è una architettura matematica. L'utilizzo degli specchi offre un approccio inusuale al mondo delle piante proponendo un percorso di ricerca e di visualizzazione di elementi geometrici che in alcuni casi sfuggono alle consuete osservazioni superficiali.

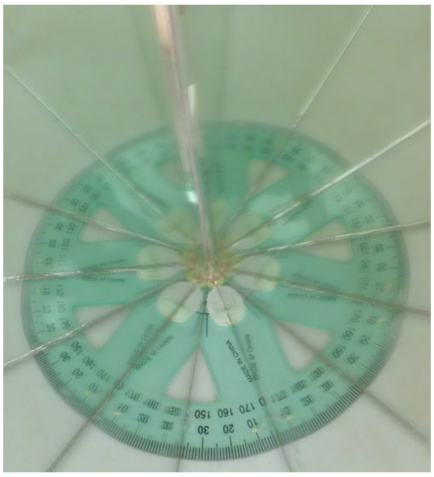


Figura 5.3: Fiorie foglie allo specchio

Tuttavia quando si parla di simmetrie per il mondo vivente è necessario tener presente che vengono effettuate delle approssimazioni; infatti nulla in natura è perfettamente simmetrico. Un altro aspetto che vogliamo sottolineare è il fatto che occorre usare cautela con le immagini reali poiché esse riproducono sul piano oggetti tridimensionali: ciò rischia di creare confusione fra la simmetria dell'oggetto (ad esempio il fiore) e la simmetria (piana) della fotografia dell'oggetto che dipenderà anche dal punto di vista da cui è stata scattata la foto.

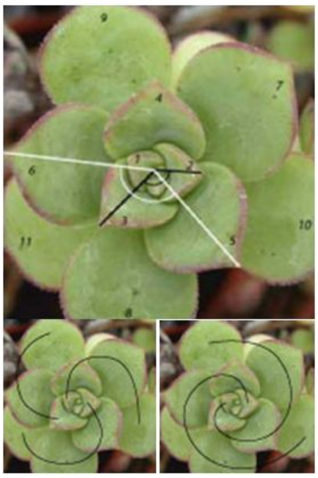
## 5.2 Anche le piante conoscono la matematica

Molte piante mostrano una disposizione delle foglie o dei petali che rispetta i numeri di Fibonacci e l'angolo aureo. La successione di Fibonacci è una successione di numeri interi positivi in cui ciascun numero è la somma dei due precedenti e i primi due termini sono per definizione 1 e 1. In maniera rigorosa tale successione può essere definita nel seguente modo:
$F_1 = 1$
$F_2 = 1$
$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$

I primi termini della successione di Fibonacci sono:
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ..$

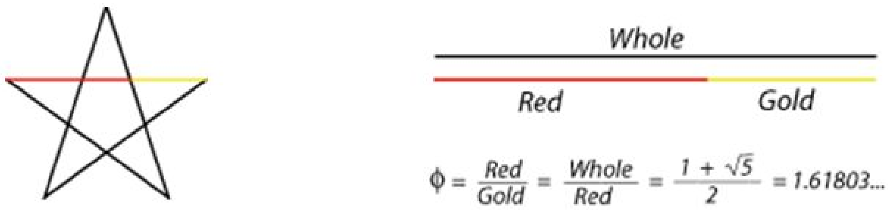
In molte piante sono presenti delle spirali visibili e il numero di queste è spesso due interi successivi della successione di Fibonacci. Quando questo accade, l'angolo tra i successivi elementi botanici (petali o foglie), si avvicina all'angolo aureo che è 137,5 gradi collegato alla sezione aurea.

Nell'immagine sono presenti tre spirali che vanno in una direzione e due nell'altra. L'angolo tra la foglia 2 e 3 e quello tra la 5 e la 6 sono molto vicini all'angolo aureo.



Trattiamo, ora, brevemente i concetti principali legati alla sezione aurea.

I greci conoscevano già come disegnare un pentagramma, era necessario dividere un segmento secondo la sezione aurea. La sezione aurea è l'unico modo per dividere un segmento in modo che il rapporto tra il segmento più lungo(rosso) e quello più corto (giallo) sia uguale al rapporto tra il segmento intero e quello più lungo. Questo rapporto è il numero aureo che viene indicato con phi.

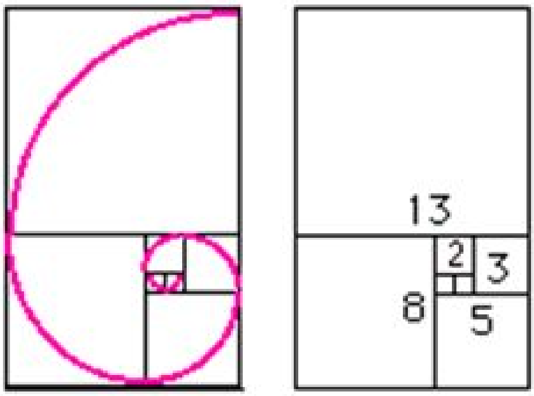



I numeri di Fibonacci formano l'approssimazione migliore al numero aureo. Il numero aureo si può ottenere, infatti, come il limite dei quozienti di numeri successivi della serie di Fibonacci, come si può notare in maniera intuitiva dal grafico:


Non bisogna quindi sorprendersi se i numeri di Fibonacci e l'angolo aureo compaiono contemporaneamente nelle piante.

È possibile rappresentare la successione di Fibonacci attraverso la spirale in figura. Si parte con due quadrati di lato uno attaccati, sopra ad essi si disegna un quadrato di lato 2. È possibile costruire un nuovo quadrato di lato 3 che tocca il quadrato di lato 2 e quello di lato 1.

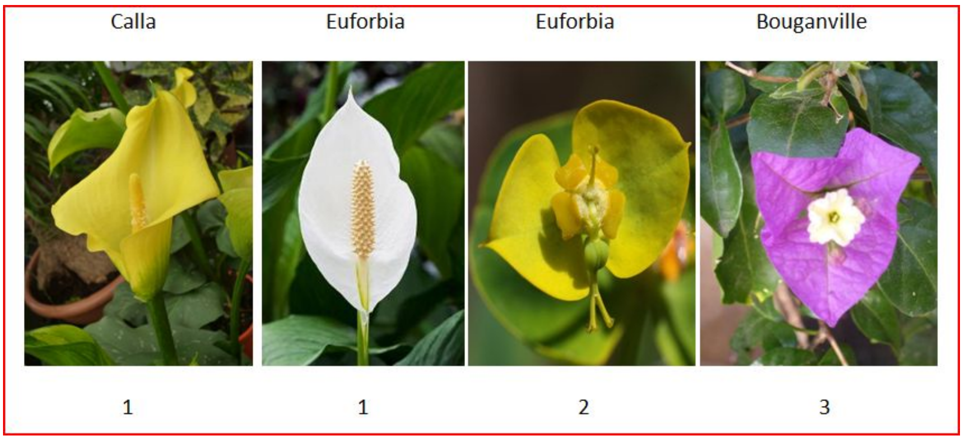
Si continua in questo modo costruendo una serie di quadrati aventi come lato la somma dei lati dei quadrati precedenti, cioè i numeri della successione di Fibonacci. All'interno di questi quadrati è possibile disegnare dei quarti di circonferenza per ottenere una spirale. Questa non è una vera spirale matematica, infatti è costituita da frammenti di cerchi, e non diventa sempre più piccola andando verso il centro. Essa è però una buona approssimazione di alcuni tipi di spirali che compaiono in natura. Questa è la spirale che

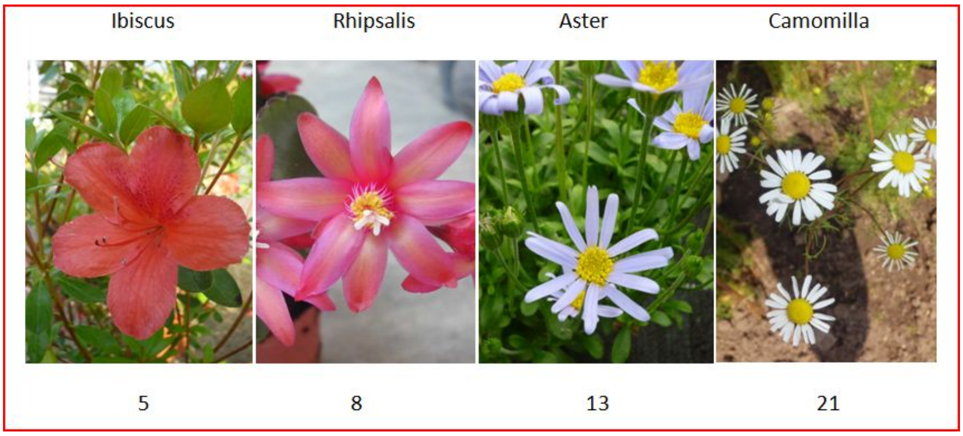



metteremo in evidenza nei fiori e nelle altre piante. La spirale considerata parte dal centro e aumenta di un fattore pari al numero aureo in ogni quadrato, quindi i punti sulla spirale si trovano a 1,618 volte lontano dal centro dopo un quarto di giro. In un intero giro disteranno 4*1.618 = 6.854 dal centro.

Consideriamo ora alcuni fiori e piante mettendo in luce gli aspetti matematici precedentemente considerasti.

È possibile trovare facilmente i primi numeri della serie di Fibonacci nei fiori più comuni che spesso compaiono sulle bancarelle del mercato. La maggior parte dei fiori presenta, infatti, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.. petali come potrà essere osservato dalle sequenze di piante che proponiamo ai visitatori:





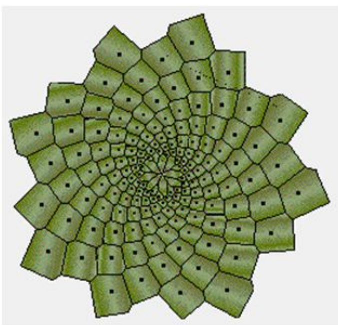

La maggior parte dei fiori presenta però 5 petali come si può notare dalle seguenti piante:

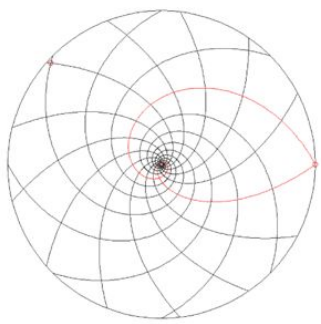
Figura 5.4: fiori con 5 petali

Vogliamo far conoscere al pubblico la bellezza della sezione aurea studiando i petali della rosa. Togliendo ad uno ad uno i petali, si può osservare che gli angoli che definiscono la loro posizione (in frazione di angolo giro) sono la parte decimale di multipli di $\Phi$. Il primo petalo si trova a un $0,618$ ($1*\Phi$) di angolo giro dal petalo 0. Il secondo petalo è a $0,236$ ($2*\Phi$) di giro dal primo petalo e avanti così per tutti gli altri. L'osservatore si domanderà il motivo per cui ciò avviene. Una delle cause principali per cui i germogli si collocano su una spirale è perché in questo modo sono più fitti, utilizzano al meglio lo spazio, evitando sovrapposizioni eccessive.

Figura 5.5: Sezione aurea nella rosa

Vogliamo, inoltre, esporre alcuni fiori e piante che presentano delle spirali. Guidiamo il visitatore ad osservare alcuni fiori in modo che venga messa in evidenza la presenza delle due famiglie distinte di spirali. Queste spirali partono dal centro e si sviluppano in direzioni opposte. Invitiamo, inoltre, l'osservatore a contarle. Chiediamo di trovare una relazione tra la disposizione botanica che compare nelle pigne e nel girasole e quale modello grafico rappresenta meglio la realtà.





Il girasole è un fiore che si presta molto bene per commentare le spirali e la successione di Fibonacci. I semi del girasole sono disposti, infatti, secondo delle spirali ed il caso più comune prevede 34 spirali in senso orario e 55 in senso antiorario. Vi sono però anche altri rapporti riguardanti il numero delle spirali: 89/55, 144/89, 233/144. Per mettere in luce la presenza di queste spirali, abbiamo intenzione di prendere dei girasoli e di inserire degli spilli che seguano la curvatura dei semi. Il visitatore avrà poi il compito di andare a collegare questi spilli con un filo di lana in modo che risaltino le due famiglie di spirali sia in senso orario che antiorario (usando due colori differenti). Se osserviamo una pigna vediamo che le scaglie formano delle spirali. Come in una specie di illusione ottica, a seconda di come le guardiamo, possiamo distinguere spirali che si avvolgono in senso orario oppure in senso antiorario. Chiediamo quante spirali si avvolgono in senso orario e quante in senso antiorario. Le prime sono 8 mentre le seconde 13, due numeri consecutivi nella successione di Fibonacci, come è possibile vedere nelle foto. Tutte le pigne presentano questa proprietà. Per effettuare il calcolo suggeriamo al visitatore di colorare con colori diversi le spirali nei due sensi.

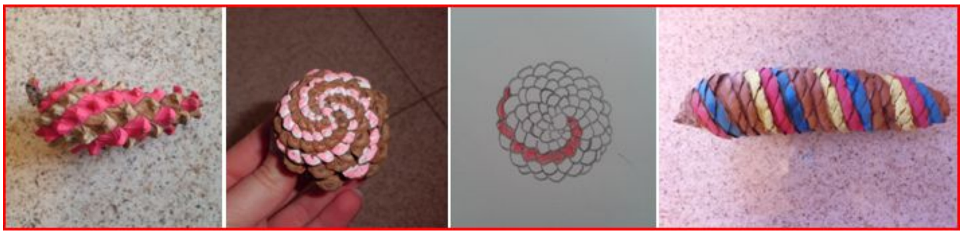
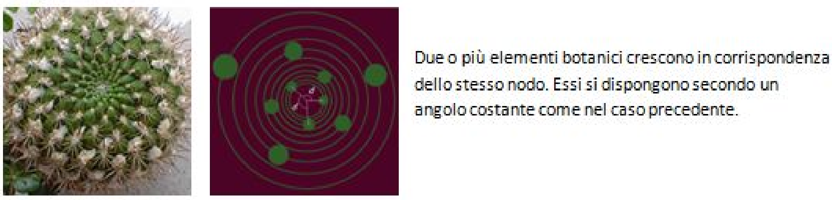


Figura 5.6: Pigne e spirali

Anche le piante grasse sono molto interessanti per quanto riguarda le spirali che presentano sulla superficie. Prevediamo un'ampia esposizione di piante grasse di cui si possono ammirare le simmetrie e andamenti geometrici particolari.

Presentiamo al visitatore diversi tipi di piante comuni affinché egli possa osservare e distinguere le diverse disposizioni delle foglie e dei fiori sul fusto. La disciplina della botanica che si occupa di questa tematica è la fillotassi. Vengono individuati 4 principali tipi di disposizioni classificati in base al numero di spirali visibili. Esistono numerosi tipi di modelli che però non seguono una geometria regolare. I tipi di disposizione principale sono i seguenti:



Anche gli alberi seguono delle regole matematiche per quanto riguarda la disposizione delle foglie lungo i rami. Mettiamo in mostra i rami delle seguenti piante:

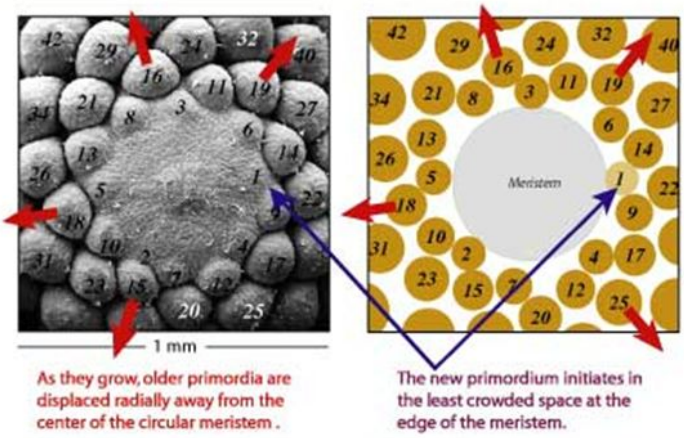
- tiglio: le foglie si dispongono da due parti opposte corrispondenti ad un angolo di mezzo giro;
- rovo, faggio, nocciolo: 1/3 di giro;
- melo, albicocco, quercia: 2/5 di giro;
- pero, salice piangente: 3/8 di giro.


Figura 5.7: Rami di alcune piante significative

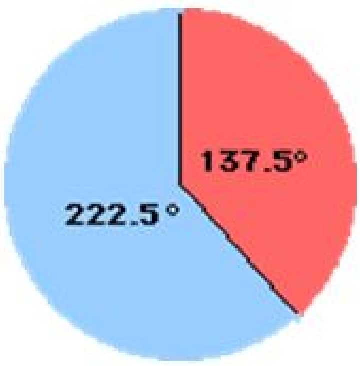
Forniamo al visitatore dei cartoncini con angoli fissati che serviranno per andare a misurare l'angolo presente tra due foglie e suddividere le piante proposte nelle varie classi.

Ci si può chiedere il motivo per cui la presenza di spirali che seguono la successione di Fibonacci siano così frequenti in natura. Effettuando un'indagine su circa 650 specie e su 12500 campioni, R. Jean (1994) stimò che, tra le piante che presentano una disposizione a spirale, circa il 92% di esse hanno una disposizione secondo la successione di Fibonacci.

Il modello matematico che riproduce la distribuzione a spirali esibita da molte piante e che spiega perché la serie di Fibonacci è predominante è stato sviluppato all'inizio del 1900. I botanici hanno dimostrato che le piante crescono a partire da un piccolo gruppo di cellule collocate all'estremità ogni ramificazione e ogni fuscello di ogni pianta. Inizialmente è stato proposto che ogni unità botanica si colloca una dopo l'altra nella zona meno occupata. Successivamente è stata approfondita questa teoria e si ha che i nuovi elementi si distribuiscono nella parte più libera lungo una circonferenza interna. Questi poi vengono gradualmente spostati verso le estremità quando la pianta cresce. In questo modo si vanno a creare delle spirali e ritroviamo le caratteristiche che abbiamo descritto precedentemente.




La cosa interessante è che un singolo angolo fisso va a produrre la struttura ottimale, indipendentemente dalla dimensione della pianta. Questo angolo è l'angolo aureo. La disposizione delle foglie è la stessa dei semi e dei petali dei fiori. Essi sono collocate a una distanza in termini di angoli di $0,618034$ di 360 gradi che è $222,492$ gradi. Solitamente, si considera l'angolo minore che è $(1 - 0,618034) * 360 = 0,381966 * 360 = 137,50776$. Una pianta che dispone i propri elementi botanici secondo il modello proposto, presenta una disposizione che permette la massima esposizione alla luce, evitando così che gli elementi si coprano a vicenda. Questo garantisce alla pianta di aver la massima area esposta alla pioggia in modo che l'acqua venga convogliata lungo i petali e giù verso le radici. Per quanto riguarda i fiori questa disposizione permette di avere la migliore esposizione agli insetti per l'impollinazione.




Dopo aver osservato le spirali in natura vogliamo proporre un laboratorio mirato a imparare a disegnare le spirali con carta e penna. Per l'attività abbiamo bisogno di fogli sui quali abbiamo già stampato dei cerchi concentrici, dei cartoncini che taglieremo per formare angoli diversi (come nei fiori) e delle matite colorate.

1. Si fissa un punto a caso sulla circonferenza più interna;
2. Utilizzando l'angolo di cartoncino si vada a collocare un punto sulla seconda circonferenza come in figura;
3. Si proceda nello stesso modo per andare ad individuare tutti i punti successivi fino all'ultima circonferenza;
4. Congiungendo i punti si ottiene una spirale.
5. Partendo da punti diversi sulla circonferenza più interna si ottengono altre spirali nello stesso verso e in quello opposto.

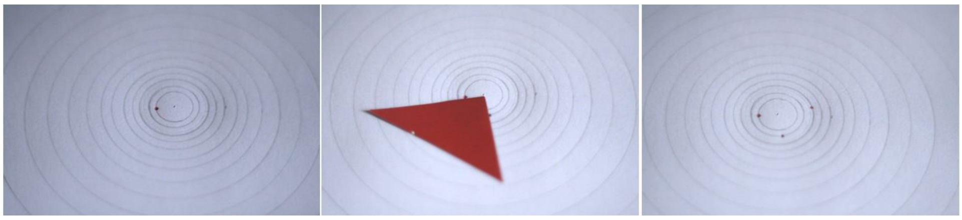


Figura 5.8: Prime fasi di costruzione

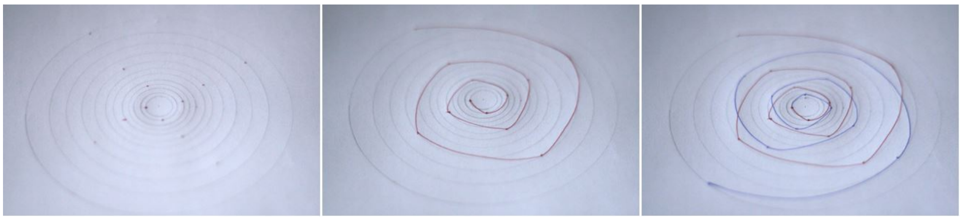
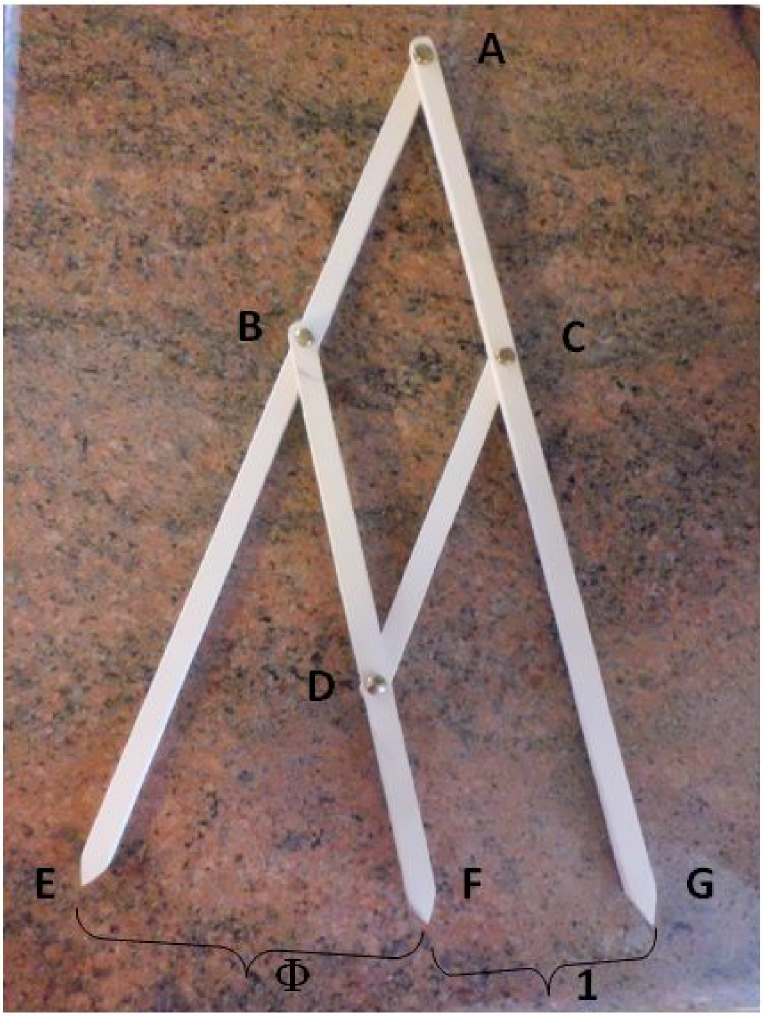


Figura 5.9: Ultime fasi di costruzione

Mettiamo a disposizione del visitatore il calibro aureo, strumento che permette di capire se due lunghezze sono tra loro in rapporto aureo. Il calibro aureo che proponiamo è piuttosto sofisticato e permette di riportare sia la media che l'estrema ragione. La sua realizzazione richiede quattro asticelle di legno di spessore $10 \times 5$ mm. Serviranno inoltre quattro bulloni con relativi dadi e due rondelle o dei fermacampioni. Le lunghezze saranno le seguenti:
AE=AG=340 mm
BF=210 mm
CE=130 mm
AB=AC=BD=CD=130 mm



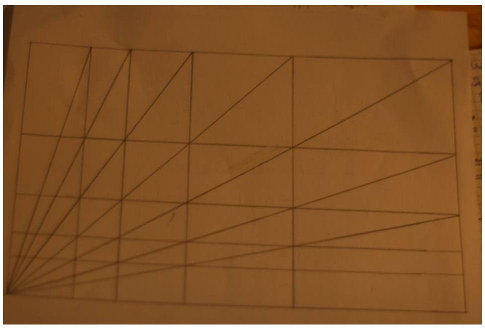

Le misure indicano le distanze tra due fori o tra un foro e una punta e non la lunghezza complessiva delle asticelle.

Sottolineiamo che i numeri considerati non sono altro che i termini della successione di Fibonacci. Quando il compasso sarà realizzato, la relazione tra le distanze EF e FG sarà molto vicina a $\Phi$. Posizionando le estremità E e G lungo una retta, l'estremità F individuerà un punto che divide il segmento in due parti m e M in modo che M/m=$\Phi$. L'utilizzo del calibro aureo è estremamente semplice e può essere utilizzato per cercare le proporzioni auree nel corpo umano e in natura.

Di seguito alcune immagini che riguardano le fasi di costruzione del calibro aureo.

Figura 5.10: Ultime fasi di costruzione

Un altro strumento interessante che proponiamo è la seguente tabella in cui sono presenti diversi segmenti in proporzione aurea.



# Capitolo 6

# Bancarella della frutta e della verdura

Una delle bancarelle più interessanti che si può trovare al mercato è quella della frutta e della verdura. Alla frutta e alla verdura è possibile, infatti, collegare alcune tematiche matematiche interessanti quali le spirali, la successione di Fibonacci, i frattali, i problemi di impacchettamento di solidi, ecc. Solitamente, su questo banchetto vengono vendute anche le uova; utilizzeremo le scatole di queste per proporre i diversi sistemi di numerazione.

## 6.1 Ananas e carciofi geometrici

Tra le varie verdure e frutti presenti in questa bancarella poniamo particolare attenzione al carciofo e all'ananas. Se si osservano con curiosità e si cerca di leggere una determinata geometria si scopre che entrambi, nel loro sviluppo, seguono un ordine molto preciso. Guardandoli dall'alto, si vede che le scaglie fanno delle spirali sia in un senso che nell'altro. Contando le spirali, si osserva con grande sorpresa che queste sono sempre in ugual numero (a volte qualche carciofo è rovinato e qualche foglia è tolta). Il numero di queste spirali è un intero appartenete alla serie di Fibonacci. Si parte da 1, 1 e poi per ottenere il terzo numero si sommano i due precedenti e così via 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... L'ananas presenta sulla superficie 5, 8, 13, 21 spirali sempre più rapide di squame esagonali. Invitiamo l'osservatore a contarle e a chiedersi il perché di questi numeri. Alla base vi è una teoria complessa e non conclusiva. Quando nel germoglio si formano tutte le gemme, ciascuna di queste va a disporsi nella posizione ottimale in modo da raggiungere un equilibrio strutturale.

Figura 6.1: Spirali del carciofo

Osservando, inoltre, l'ananas si nota che la buccia è ricoperta da placche esagonali. Questa forma è la migliore per tassellare la superficie, cioè ricoprirla con mattonelle in modo che esse non si sovrappongano e che non restino porzioni di piano vuote. Solamente tre figure geometriche piane, il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono sono candidate alla tassellatura. In ogni vertice delle figure che compongono la tassellatura devono convergere angoli la cui somma sia un angolo giro. Poiché gli angoli interni dell'esagono, del quadrato e del triangolo equilatero misurano rispettivamente 120, 90 e 60 gradi, nel caso della tassellatura con gli esagoni in ogni vertice convergono 3 angoli per una somma complessiva di 360 gradi, nella pavimentazione con i quadrati se ne hanno 4 e, infine con il triangolo equilatero 6. In questo modo si sfrutta meglio lo spazio: a parità di area, l'esagono ha un perimetro minore del triangolo equilatero e del quadrato. L'osservatore può fare eventuali collegamenti ad altri oggetti in natura che presentano gli esagoni come forma principale come per esempio gli alveari.

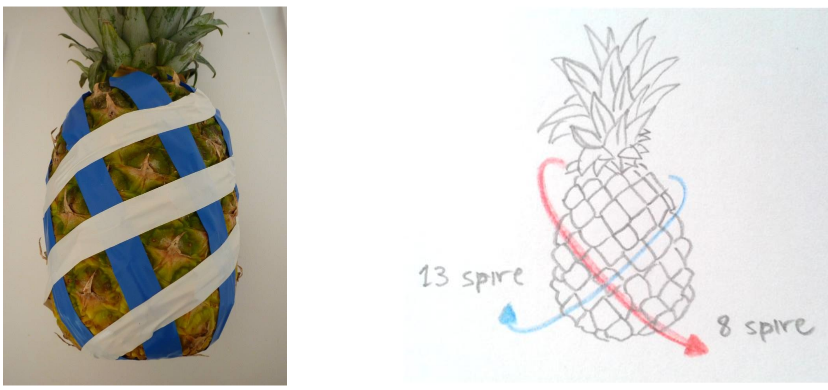



Figura 6.2: Spirali dell'ananas

## 6.2 Che cavolo!

Il cavolfiore presenta un enorme contenuto di matematica. È la forma a renderlo nobile, il cavolfiore ha infatti una propria organizzazione e struttura interna. Un fiore dispone i suoi petali (enti minimi) attorno ad un corpo centrale, il cavolfiore, invece, è molto più complesso: non ha né corpo centrale, né enti minimi. Staccando uno dei rami principali si vede che il nuovo pezzo, più piccolo dell'ortaggio intero, presenta la stessa struttura della totalità. Ognuno di questi poi si dirama a sua volta in parti simili più piccole. La proprietà per cui un intero assomiglia ad una parte di se stesso si chiama auto-similarità ed è ciò che caratterizza i frattali. Con un cavolfiore dopo circa sei-sette passaggi diventa impossibile continuare a separarlo in pezzetti simili, ma immaginando di avere un cavolo perfetto e mani precisissime, si potrebbe proseguire all'infinito. Accade analogamente con alcuni oggetti matematici costruiti sfruttando l'auto-similarità, come il fiocco di Koch. La costruzione del fiocco parte da un triangolo equilatero. Ogni lato viene diviso in tre segmenti uguali; quello centrale diventa la base di un altro triangolo equilatero, si ottiene una stella a sei punte e così via fino all'infinito. Il fiocco ha un'area pari a circa 8/5 del triangolo iniziale, ma un perimetro infinito.

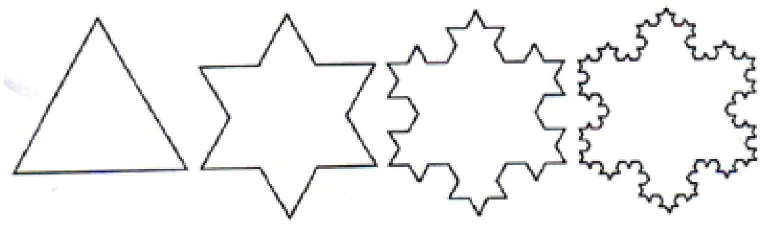


Figura 6.3: fiocco di Koch

La proprietà di essere auto-simile compare sia nel broccolo romanesco che nel cavolfiore bianco. Il pubblico viene guidato ad osservare questa proprietà mostrando le varie parti uguali ma di dimensione diversa di cui il cavolfiore si costituisce.

Figura 6.4: Suddivisione del cavolfiore

## 6.3 Successione di verdura

Un'altra parte espositiva della bancarella analizzata comprende la successione di verdura. Molte verdure viste in sezione sono costituite da parti uguali tra loro e il numero di queste è un intero della successione di Fibonacci. Andiamo a considerare le seguenti verdure che verranno disposte in serie crescente per andare a riprodurre la successione stessa:

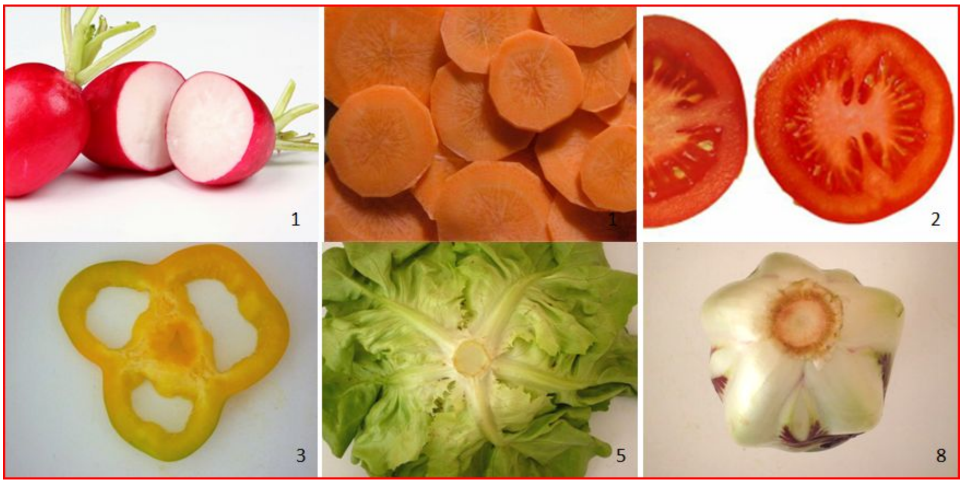



Figura 6.5: Successione di verdura

- 1 Rapanello
- 1 Carota
- 2 Pomodoro

- 3 Peperone
- 5 Lattuga
- 8 Radicchio

L'obiettivo di questa esposizione è mostrare l'importanza dei numeri di Fibonacci e la loro presenza frequente in natura. Questa verrà seguita da un'attività pratica di consolidamento di queste conoscenze utilizzando questa volta la frutta. Facciamo sezionare a gruppi alcuni frutti scelti e osservare le caratteristiche interne, in seguito chiediamo di disporre questi secondo la successione di Fibonacci in maniera analoga a quanto visto per la verdura. La frutta a disposizione è:

- 1 Kiwi
- 1 Pesca
- 2 Noce
- 3 Banana
- 5 Pera

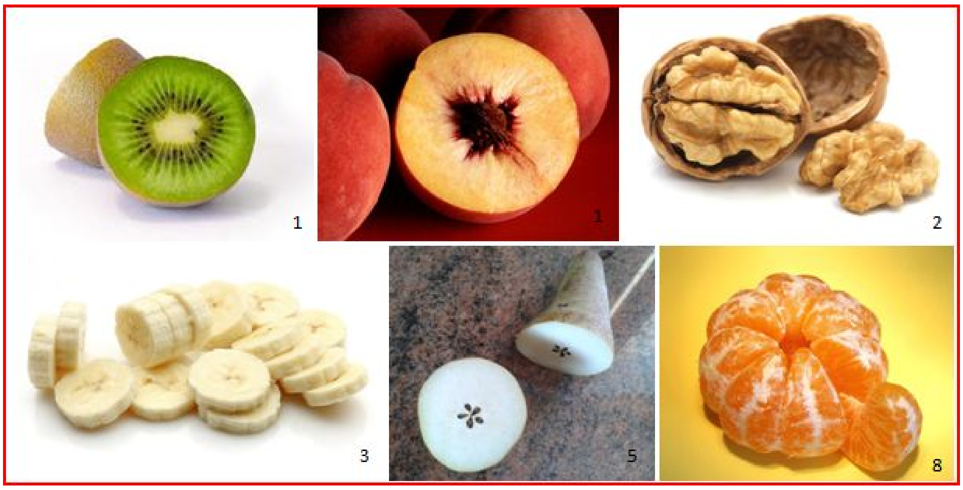



Figura 6.6: Macedonia di frutta

Abbiamo proposto questa attività per fissare meglio questi concetti matematici e guidare il pubblico ad osservare con occhio attento il mondo che lo circonda.

## 6.4 Vicini vicini

Un altro problema matematico presente al mercato è quello dell'impacchettamento, ovvero quello relativo alla disposizione più compatta di mele o arance (dipende dalla stagione) che abbiano circa le stesse dimensioni. Al mercato si possono osservare piramidi di arance e cassette di mele e il problema dell'impacchettamento, posto già da Keplero, è risolto da ogni venditore di frutta. È un problema ancora aperto a cui non è stata data una dimostrazione. Proponiamo agli osservatori di giocare un po' con le arance cercando di disporle in maniera ottimale: diamo una cassetta ad ogni gruppo composto da circa quattro persone e un numero fissato di arance che verranno disposte in modo da farne contenere il maggior numero. Facciamo osservare innanzitutto che non c'è un unico modo di riporle, infatti i diversi gruppi otterranno probabilmente risultati differenti anche se molto simili e faremo contare quante arance rimangono inutilizzate. Viene discusso quindi quale sia la configurazione migliore che corrisponde a una delle seguenti:

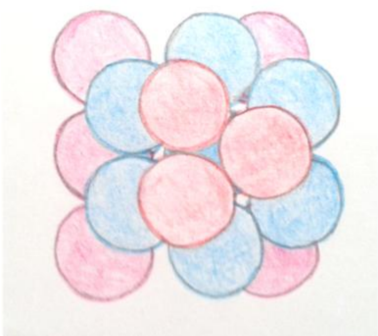


Figura 6.7: Prima disposizione

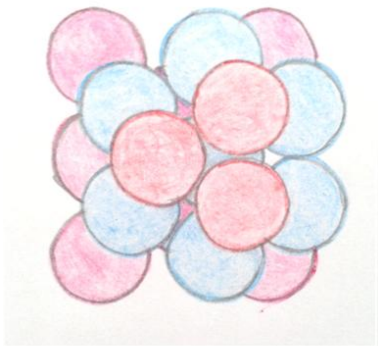


Figura 6.8: Seconda disposizione

Viene disposto il primo strato di arance in maniera compatta e il secondo strato si ottiene mettendo le arance sugli incavi formando degli esagoni. Al terzo strato le arance possono essere disposte esattamente come nel primo vedi immagine 6.7 oppure in una disposizione analoga a quella del secondo piano rispetto al primo vedi immagine 6.8.
Lo scopo di questa attività è esporre il problema, molto presente in natura, della minimizzazione degli spazi e il fatto che in matematica ci sono delle questioni che non riusciamo a dimostrare con certezza, ciò rende la matematica e la realtà ancora più interessanti. Come scriveva Niccolò Stenone (1638-1686):

*Belle sono le cose che vediamo,*
*ancor più belle quelle che comprendiamo,*
*ma di gran lunga le più belle*
*sono quelle che non comprendiamo.*

i problemi più belli sono quelli aperti, non i problemi risolti. Vogliamo trasmettere il fatto che fare ricerca, andare a investigare, è la vera emozione, non certo l'erudizione di chi si limita al puro sapere codificato. Nella matematica bisogna sfruttare la curiosità e cercare dei metodo risolutivi: queste cose sono molto preziose e molto divertenti, perché aiutano ad affrontare qualunque problema.

## 6.5 Non facciamone una frittata

Vogliamo proporre con questa attività delle spiegazioni riguardanti i diversi sistemi di numerazione. Per fare ciò utilizziamo i contenitori delle uova che permettono di trattare il sistema decimale, quello binario, base 4 e base 6.

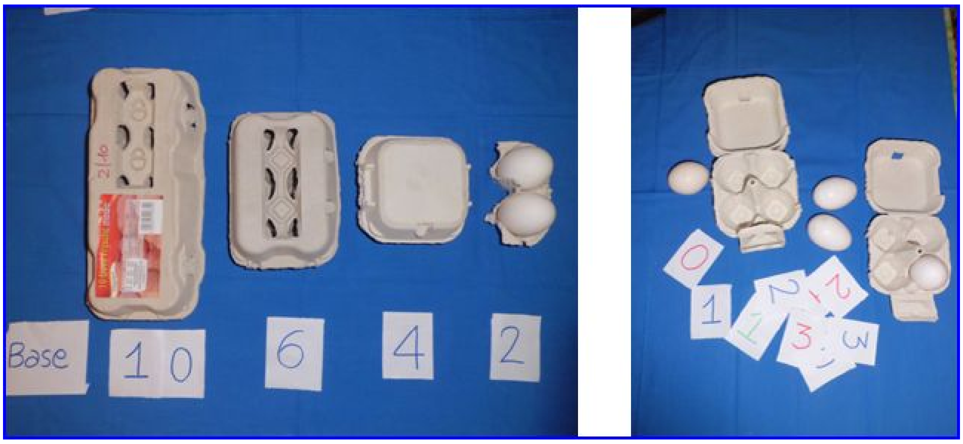



Figura 6.9: Sistemi di numerazione

Vogliamo iniziare considerando il sistema decimale che è più familiare al visitatore rispetto agli altri sistemi. Vogliamo andare a sottolineare il fatto che esso è un sistema posizionale e che è possibile scrivere qualsiasi numero utilizzando le dieci cifre da 0 a 9. Osservando la successione di immagini seguente sono evidenti le caratteristiche di questo sistema.

Quando si riempie completamente una scatola questa va a formare una decina e 10 scatole complete cioè 10 decine formano un centinaio.


Figura 6.10: Base 10

Passando, ora, al sistema a base 4 (anche se non è molto utilizzato), è possibile procedere in maniera analoga facendo attenzione alla posizione che viene occupata da 0, 1, 2, 3, uniche cifre che possono essere utilizzate. Si avranno quindi i seguenti numeri rappresentati utilizzando le scatole che possono contenere al massimo quattro uova. Osservando la successione di immagini è immediato capire come funziona un sistema posizionale e come avviene la conversione dal sistema decimale a quello quaternario e viceversa, essendo tutto sotto gli occhi del visitatore.


Figura 6.11: Base 2

In maniera analoga è possibile trattare le altre basi considerate precedentemente. Queste spiegazioni saranno affiancate da eventuali informazioni

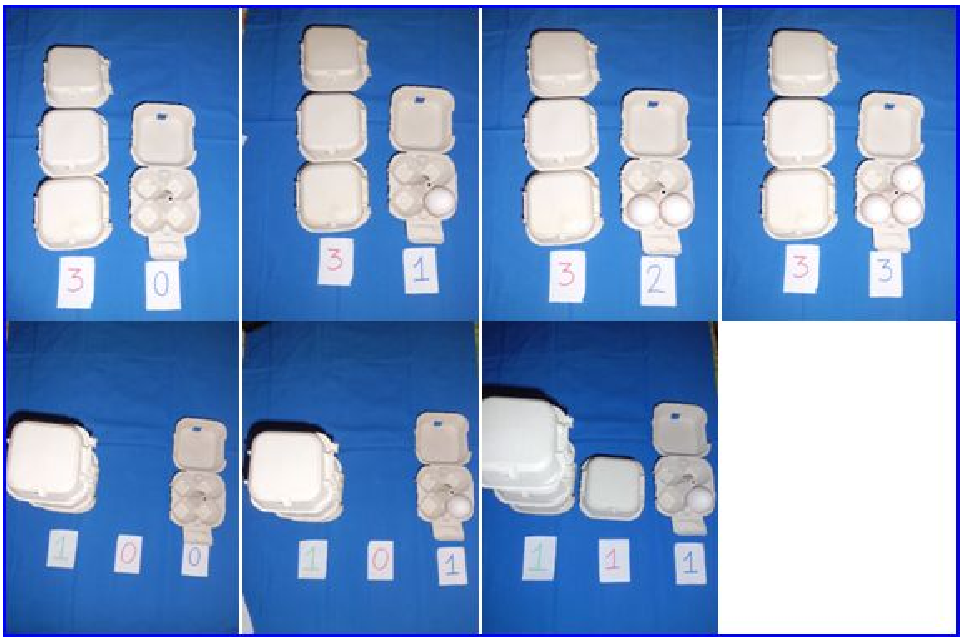



Figura 6.12: Base 2

di carattere storico circa la nascita dei diversi sistemi di numerazione e gli utilizzi che ne vengono fatti, oltre a quello decimale, nella vita reale.

# Capitolo 7

# Bancarelle dei dolciumi

Solitamente al mercato è presente la bancarella con i dolci, caramelle, ecc.... Questi ci permettono di trattare argomenti come la stima di oggetti, i frattali, i numeri triangolari, quadrati, esagonali, il nastro di Moebius e tanto altro.

## 7.1 Spirali di liquirizia ed eliche dolci

Lo scopo di questa parte è l'esposizione di diversi tipi di spirali nel piano e nello spazio utilizzando la geometria di alcuni dolciumi. Le rotelle di liquirizia si prestano particolarmente bene per la loro flessibilità per andare a descrivere lo sviluppo di alcune spirali piane e altri grafici di funzioni. Analizziamo, innanzitutto, la spirale più semplice che corrisponde alla spirale di Archimede che si caratterizza per il fatto di avere i bracci successivi a una distanza fissa. Successivamente, mostriamo la spirale logaritmica che l'osservatore avrà già avuto l'occasione di apprezzare precedentemente. In essa il raggio cresce ruotando e avvicinandosi al polo, la curva ci si avvolge intorno senza mai raggiungerlo.
Si avrà poi la spirale aurea che è una spirale logaritmica con fattore di crescita pari a $\Phi$, la sezione aurea. Spirali meno conosciute ma che comunque vogliamo mettere in mostra sono quelle di Galileo, iperbolica, di Cornu (o clotoide). Una clotoide è un raccordo progressivo, inserito come elemento di transizione tra due archi di circonferenza non concentriche l'uno interno all'altro. Il nome della curva deriva da Cloto, una delle Parche greche, che avvolgeva il filo dell'esistenza di ogni persona attorno a due fusi: la curva intera della clotoide ricorda, infatti, un filo avvolto tra due fusi rappresentati

dai centri delle due spirali. Le caratteristiche principali di alcune di queste spirali possono essere notate nelle seguenti immagini:

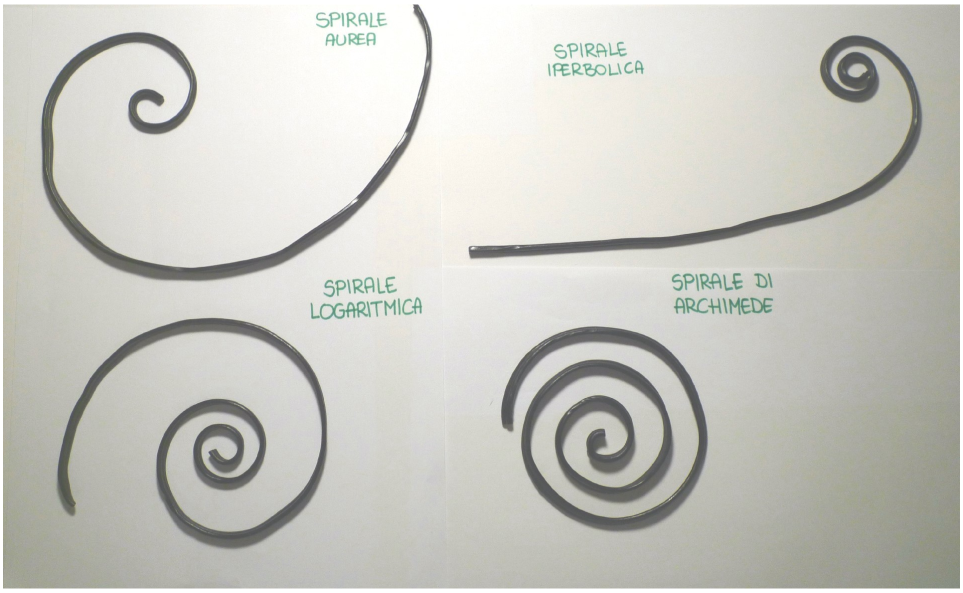


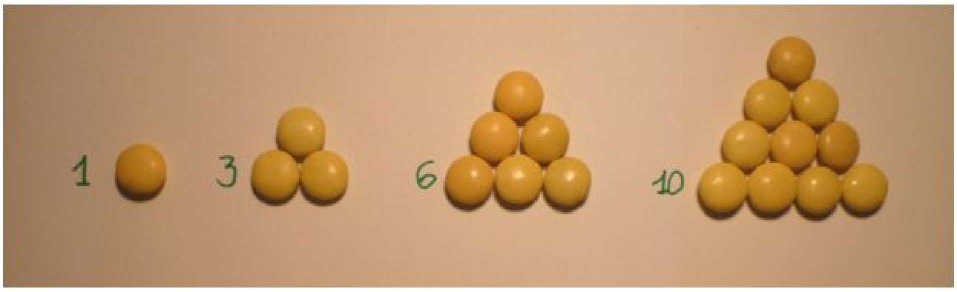

Figura 7.1: Spirali di liquirizia

Per quanto riguarda, invece, le spirali tridimensionali vogliamo proporre all'osservatore le eliche che compaiono nelle seguenti caramelle. L'elica è una curva nello spazio a tre dimensioni, rappresentata da una linea avvolta con un angolo costante attorno ad un cilindro. Nella realtà che si osserva ogni giorno sono presenti molti oggetti che presentano questa struttura per esempio una molla, una vite, una scala a chiocciola e in biologia il DNA e in alcune strutture delle proteine. Una curiosità che riguarda le eliche è che il cammino più breve tra due punti di un cilindro (non sulla stessa verticale) giace su un'elica.

Figura 7.2: Caramelle a forma di elica

## 7.2 Numeri poligonali

I Pitagorici rappresentavano alcuni numeri in schemi composti da punti e li classificavano in base alla forma dello schema che ottenevano. I numeri in figura sono detti triangolari perché è possibile disporre le unità che li compongono su una griglia regolare, in modo da formare un triangolo rettangolo isoscele. È possibile disporli anche in modo da formare dei triangoli equilateri come si osserva nella figura ottenuta con le caramelle.

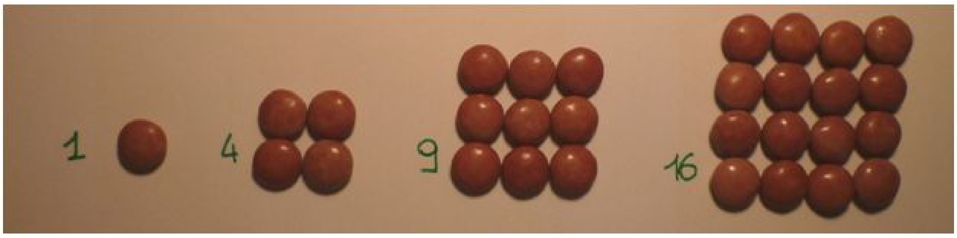



Come trovare l'n-simo numero triangolare? Non è difficile, basti osservare il seguente schema:

$$
\begin{gathered}
0+1=1\\
0+1+2=3\\
0+1+2+3=6\\
0+1+2+3+4=10\\
0+1+2+3+4+5=15\\
0+1+2+3+4+5+6=21\\
0+1+2+3+4+5+6+7=28\\
0+1+2+3+4+5+6+7+8=36\\
0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45
\end{gathered}
$$

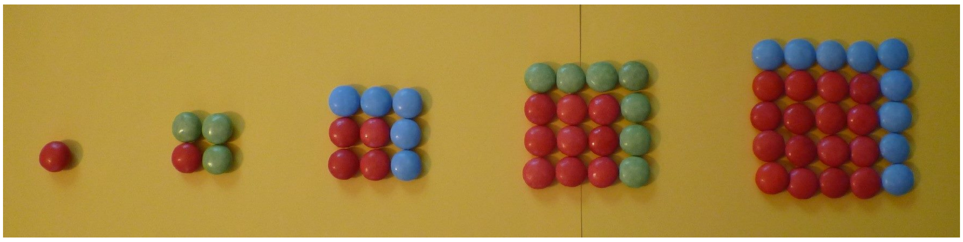
Un numero triangolare è, infatti, un numero che è la somma dei primi N numeri naturali.

Un numero m è un quadrato perfetto se e solo se è possibile disporre m punti a formare un quadrato, per questo l'elevamento alla seconda potenza è chiamato anche elevamento al quadrato. I numeri nella figura sono detti quadrati perché è possibile disporre le unità che li compongono su una griglia regolare, in modo da formare un quadrato.

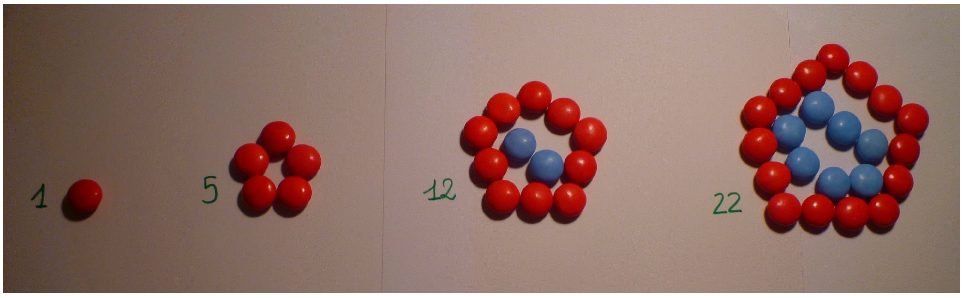



Si vede anche facilmente come un numero quadrato sia la somma di due numeri triangolari.

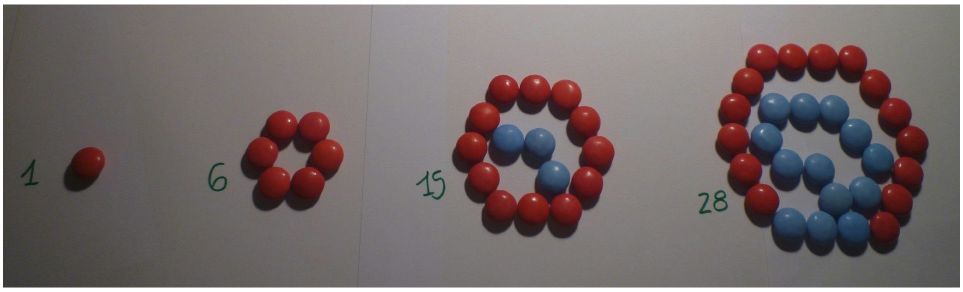
Un' altra proprietà dei numeri quadrati è di poter essere espressi come somma di numeri dispari consecutivi, come si vede dalla figura che segue.



Molto curiosi sono anche i numeri pentagonali cioè numeri poligonali che rappresentano dei pentagoni. I pitagorici sapevano che i numeri pentagonali erano $1, 5, 12, 22, \ldots, \dfrac{3n^2 - n}{2}$ (in notazione moderna) e che un generico numero pentagonale si ottiene sommando i numeri della progressione aritmetica di ragione 3 e primo termine 1 cioè $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots$ Alcuni esempi sono mostrati nella figura seguente:




Un altro insieme di numeri particolare è quella dei numeri esagonali. Un numero si dice esagonale se è il numero di palline, nel nostro caso caramelle, che possono essere disposte a formare i lati di esagoni via via più grandi, ciascuno con due lati in comune col precedente, come mostra la figura.




Abbiamo proposto l'esposizione di questi numeri utilizzando le caramelle per stupire il visitatore facendogli apprezzare alcune meraviglie della matematica conosciute già ai tempi dei pitagorici. Questo argomento è estremamente semplice e di facile comprensione e quindi adatto ad un ampio pubblico.

## 7.3 Ti stimo!

Chiediamo al visitatore se ha mai provato a indovinare quante caramelle sono contenute in un barattolo, oppure se ha mai stimato il numero di persone presenti ad un concerto a cui ha partecipato. Tutto ciò è collegato al 'senso di numero' che permette di riconoscere le quantità e di metterle in relazione tra loro. E' la facoltà che permette all'uomo di accorgersi che qualcosa è cambiato in un piccolo insieme di oggetti se, a sua insaputa, viene aggiunto o tolto uno di questi. Pensare che esso sia presente solo nell'uomo è, però, errato; si può trovare, infatti, un rudimentale senso del numero anche negli animali. Proponiamo di seguito alcuni esempi:

- Se ad un nido con quattro uova, ne viene sottratto uno, l'uccello non se ne accorge, ma se al nido vengono sottratte due uova, l'uccello scapperà per non tornare mai più, ciò significa che probabilmente l'uccello distingue il due dal tre ma non il tre dal quattro.

- Un episodio veramente accaduto o forse solo un aneddoto: 'Un castellano voleva mandare via dalla torre un corvo che vi aveva fatto un nido. Quando qualcuno entrava nella torre, però, il corvo scappava. Allora si fecero entrare cinque persone. Ne uscirono quattro e ne rimase una sola, il corvo, non distinguendo il quattro dal cinque, tornò al suo nido sicuro che la torre fosse vuota.'

- Numerosi esperimenti mostrano che scimpanzé, ratti, leoni e colombi, per esempio, posseggono la capacità di confrontare il numero di oggetti di insiemi diversi, con evidente vantaggio ai fini della sopravvivenza.

Il senso del numero è essenziale per la sopravvivenza sia per gli animali che per l'uomo: si può comprendere l'entità di un pericolo per poi decidere di affrontarlo o di fuggire (per esempio in uno scontro tra branchi, in una battuta di caccia nella savana, ecc.). Non esistono sostanziali differenze fra il senso del numero negli animali che ne sono dotati e quello proprio dell'uomo, che possiede un senso del numero molto limitato: dopo molti esperimenti, si è giunti alla conclusione che nell'uomo il senso del numero arriva al quattro.

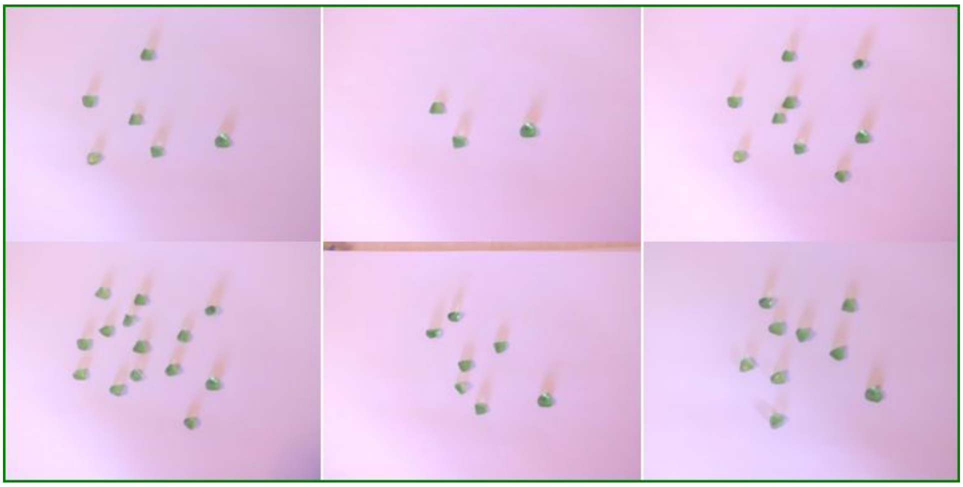
Il matematico Keith Devlin, nel libro *Il Gene della Matematica*, scrive: *Quel che è certo è che il nostro cervello sembra trattare diversamente gli insiemi contenenti al massimo tre elementi da quelli più grandi.* [...] *Il fatto che quando si superano i tre oggetti il nostro comportamento cambi all'improvviso indica che forse il cervello si serve, nei due casi, di due meccanismi diversi. Per insiemi contenenti al massimo tre elementi, il riconoscimento della numerosità, ossia del numero degli elementi dell'insieme, sembra pressoché istantaneo e viene effettuato senza contare. Per insiemi di quattro o più elementi, tuttavia, il risultato viene ottenuto plausibilmente contando*[...]

La capacità di argomentare matematicamente è invece una prerogativa esclusivamente umana ed essa ha origine dalla stessa facoltà cerebrale che ci consente di usare il linguaggio, ossia le capacità simbolica e di astrazione: il concreto ha preceduto l'astratto come dice Bertrand Russell: *Devono esserci voluti secoli e secoli per scoprire che una coppia di fagiani e un paio di giorni sono entrambi esempi del numero due.* La conquista del numero ha richiesto, quindi, diverse e peculiari capacità: per passare dal senso innato del numero alla matematica come la intendiamo ora sono necessarie due facoltà: la capacità di contare e l'uso di simboli arbitrari per rappresentare i numeri.

Proponiamo un'attività interattiva riguardante la capacità di quantificare un insieme di oggetti, in questo caso caramelle. Questo test di stima si dividerà in due fasi: nella prima mostriamo per pochi secondi due gruppi di caramelle di colore diverso e richiediamo quale sia l'insieme che presenta il maggior numero di caramelle senza cercare di capire il numero esatto.

L'osservatore sarà chiamato a stimare in maniera istantanea una sequenza di dieci prove e potrà quindi testare le difficoltà che si presentano nel fare confronti tra quantità. Grazie a questi esperimenti è possibile mettere in luce come a volte il cervello porti in errore non riuscendo ad elaborare correttamente le informazioni provenienti dal mondo esterno. Proponiamo di seguito alcune immagini che rappresentano alcuni possibili gruppi di caramelle che a volte traggono in inganno. In alcune di queste foto compaiono dei gruppi di caramelle compatti confrontati a gruppi di caramelle disposte in maniera distanziata. A volte alcune persone pensano che il secondo gruppo contenga più elementi anche se questo non è vero, essendo tratto in inganno dalla disposizione.

La seconda parte riguarda invece la stima effettiva della quantità di caramelle presenti. Il visitatore sarà invitato a stimare in pochi secondi quante caramelle sono presenti nell'insieme proposto. Si osserva in questo caso che la mente dell'uomo comune è piuttosto limitata e riesce a stimare correttamente solo quantità ridotte come scritto in precedenza. Proponiamo di seguito alcune immagini che presentano gruppi di caramelle che presentano difficoltà diverse.



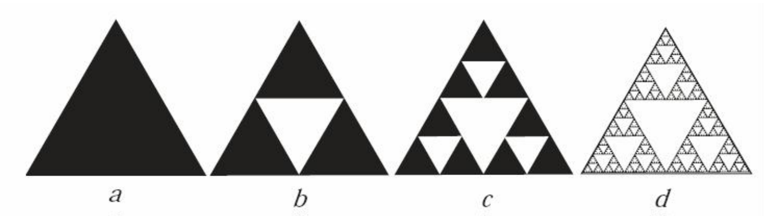
Recenti ricerche hanno dimostrato che è presente un profondo rapporto tra gli esiti di questi test di stima e le capacità matematiche di base.

## 7.4 Frattali di caramelle

Abbiamo già proposto i frattali nel banchetto della verdura con l'esposizione dei cavolfiori. Ora vogliamo riprendere questo argomento utilizzando le caramelle e tratteremo, in particolare, l'insieme di Cantor e il Triangolo di Sierpinski.

Proponiamo al visitatore come si ottiene questo insieme utilizzando le caramelle.

Fra i primi frattali studiati, troviamo il cosiddetto triangolo di Sierpinski (o Gerla di Sierpinski), dal nome del matematico che per primo ne ha studiato le proprietà. Si tratta di un frattale molto semplice da ottenere anche per via geometrica elementare. Da un punto di vista strettamente geometrico viene generato con una serie di rimozioni. Si inizia con un triangolo pieno da cui si rimuove un triangolo di lato pari alla metà di quello iniziale, esso sarà formato quindi da tre triangoli. Da ciascuno di questi si elimina un triangolo come in precedenza e si ottiene una figura formata da nove triangoli. Si continua in questo modo fino all'infinito. Grazie a questa costruzione è evidente l'autosimilarità: la figura si può dividere in tre parti tutte e tre simili all'intero frattale. La scelta della figura di partenza è irrilevante: è possibile ottenere altri frattali a partire da insiemi di punti diversi (per esempio il quadrato) e procedendo nello stesso modo.




Le caratteristiche principali che questo oggetto matematico presenta sono le seguenti. Il perimetro del triangolo diventa ogni volta i 3/2 del precedente, infatti i triangoli si triplicano restando simili a se stessi mentre il loro lato si dimezza. Possiamo dunque affermare che, al crescere del numero dei passi, anche il perimetro crescerà indefinitamente: esso tende ad infinito quando anche il numero di passi tende ad infinito. Questo concetto è abbastanza intuitivo ed estremamente curioso, farà stupire certamente il pubblico. Ugualmente interessante è l'area di questo triangolo. L'area del triangolo diventa ogni volta i 3/4 della precedente, infatti ad ogni passo viene eliminato da ogni triangolo il triangolo formato dalle parallele ai tre lati che uniscono i punti medi dei lati stessi. Possiamo dunque affermare che, al crescere del numero dei passi, l'area decrescerà indefinitamente: essa tende a zero quando il numero di passi tende ad infinito.

# Capitolo 8

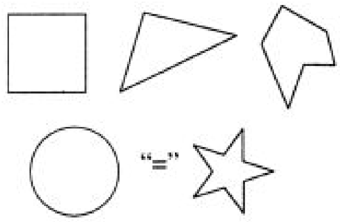
# Bancarelle dei vestiti e dei cappelli

## 8.1 Tipologie e topologie di vestiti

Vogliamo mostrare che oltre alla geometria dei poligoni, poliedri, segmenti, angoli ecc. esiste un altro tipo di geometria, quella in cui le figure si possono deformare, che permette di individuare alcune proprietà fondamentali e costruttive degli oggetti geometrici. Di queste cose si occupa la topologia. Proponiamo alcune domande classiche: per esempio, in cosa differiscono una sfera e una ciambella con un buco? Vorremmo sottolineare come spesso la topologia si occupa di percorsi e cammini che si possono immaginare su un oggetto geometrico. Come per conoscere una città per la prima volta si percorrono a piedi le strade con una cartina in mano, analogamente per conoscere un oggetto topologico è necessario percorrerlo in diversi modi. È difficile parlare di topologia in maniera rigorosa, quindi vorremmo descrivere alcune idee di fondo facendo intuire alcuni concetti attraverso molti esempi e attività pratiche.

Per dare un'idea di cosa si occupa la topologia diremo innanzitutto cosa sono le trasformazioni topologiche. Una trasformazione topologica per una figura del piano o un oggetto (un solido o una superficie o una linea) dello spazio è intuitivamente una deformazione (in realtà sono qualcosa di più complesso ma per farsene un'idea è sufficiente pensare alle deformazioni). Se ci limitiamo a considerare oggetti bidimensionali, superfici, e immaginiamo che gli oggetti con cui abbiamo a che fare siano costituiti da materiale perfettamente estensibile e deformabile in modo tale che si possa stirarli, tenderli, comprimerli, torcerli quanto si vuole, senza che si spezzino, possiamo pensare che la topologia vada a studiare quelle proprietà degli oggetti che resistono a tali trasformazioni. Abbiamo pensato quindi di utilizzare vestiti costituiti da stoffe elasticizzate che possono subire queste deformazioni senza strapparsi.

Chiaramente le misure e la forma dell'oggetto possono variare molto: un quadrato potrà variare in un triangolo o un poligono qualsiasi o un cerchio. In altri termini 'essere un quadrato' o 'essere un cerchio' o 'essere un cubo' non sono proprietà topologiche.




In realtà le trasformazioni ammesse in topologia sono ancora più generali, per esempio è lecito anche effettuare tagli sugli oggetti pur di rincollarli in modo che punti originariamente attaccati tornino tali. Potrebbe quindi sembrare che in topologia si confonda tutto, in realtà non è così: ci sono figure che non possono essere ridotte una nell'altra per semplice effetto di deformazioni. Per esempio, un cerchio non potrà mai trasformarsi senza strappi in una corona circolare, né una circonferenza in un segmento, un oggetto unidimensionale (un filo) non potrà mai diventare bidimensionale (una cintura) o un solido. Quindi, 'avere un buco', 'essere fatto di un unico pezzo', 'avere una certa dimensione' sono proprietà topologiche. Uno dei compiti della topologia è proprio quello di scoprire se due figure sono topologicamente equivalenti, cioè si può passare da una all'altra attraverso le trasformazioni precedentemente descritte.

Un esempio di queste trasformazioni è la deformazione di un disco in una sfera con un buco. Facendo questo procedimento non si effettuano tagli e si compie quindi una trasformazione topologica, come si può vedere dall'immagine.

Figura 8.1: Disco omeomorfo a sfera con buco

Consideriamo, ora, due esempi di superfici interessanti dal punto di vista topologico: un cilindro e un nastro di Moebius. Per fare questo prendiamo delle cinture: allacciando i due lembi normalmente si ottiene un cilindro, mentre se si uniscono dopo una torsione si ottiene un nastro di Moebius.

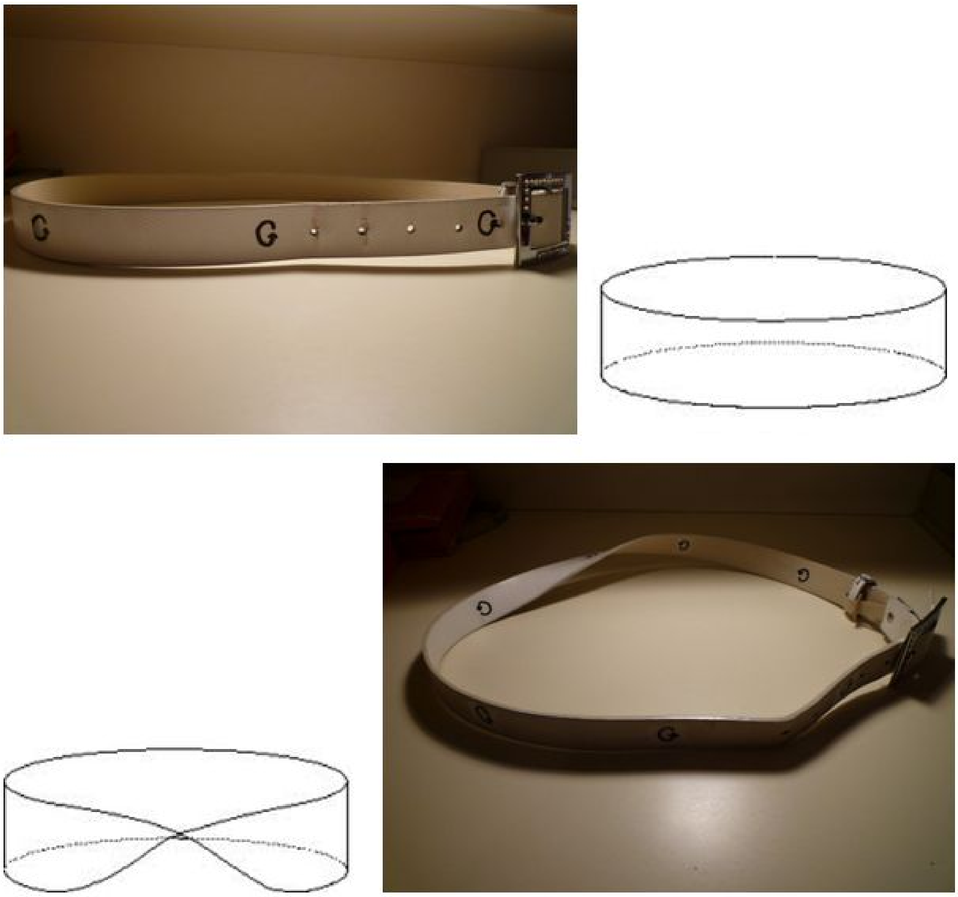


Figura 8.2: Cilindro e nastro di Moebius

Si osserva che percorrendo con un dito la superficie del nastro di Moebius si ritorna al punto di partenza senza mai staccare il dito. Questo anello non ha due facce, una inferiore e una superiore, a differenza del cilindro, ma ha una sola superficie.

Proviamo poi a tagliare l'anello a metà. Contrariamente a quanto ci potremmo aspettare, non avremo due nastri, ma uno solo lungo il doppio.

Figura 8.3: Cilindro e nastro di Moebius

Tagliamo ancora a metà la striscia così ottenuta e, sorpresa, otteniamo due anelli concatenati. Otteniamo ugualmente due anelli tagliando l'anello di partenza a un terzo, invece che a metà, sempre nel senso della lunghezza, una è un nastro di Moebius, l'altra è una striscia con una torsione di 360 gradi.

Figura 8.4: Tagli e nastri ottenuti

Un'altra caratteristica interessante del nastro di Moebius che si può vedere con stoffa e filo è la seguente. Cerchiamo di cucire un disco a un nastro di Moebius lungo il bordo che è per entrambi una circonferenza per le considerazioni fatte in precedenza. Questo non è possibile, infatti facendo questa operazione di identificazione dei bordi si ottiene quello che in topologia viene detto piano proiettivo che non è rappresentabile in $\mathbb{R}^3$ e cioè nello spazio tridimensionale. E' possibile invece cucire il bordo di un disco ad un cilindro.

Un tentativo di incollamento del bordo di un disco con il bordo di un nastro di Moebius si può osservare nella seguente figura.

Figura 8.5: Attaccare disco a nastro di Moebius

Questo problema viene descritto nel libro di Lewis Carroll (1832-1898) *Sylvia and Bruno.* Il racconto è pieno di suggestioni matematiche e fisiche e contiene anche una spiegazione di come costruirne una 'borsa magica' in cui non si può distinguere l'interno dall'esterno cioè un piano proiettivo. Nel racconto, la borsa magica prende il nome di Borsa di Fortunatus, con riferimento a un racconto tedesco del XVI secolo in cui il giovane cipriota Fortunatus riceve in dono dalla dea Fortuna una borsa che si riempie continuamente per quanto da essa si attingano cose e denaro. Le istruzioni da seguire sono le seguenti: Si prendono tre fazzoletti quadrati. Se ne cuciono due lungo un lato. Si cuciono i lati opposti con un mezzo giro. E infine si cuce il terzo fazzoletto lungo il bordo del nastro di Moebius così ottenuto. Proponiamo di seguito il testo originale:

'Avete sentito della Borsa di Fortunatus, Miladi? Ah, così! Sareste sorpresa di sentire che, con tre di questi piccoli fazzoletti, potereste fabbricare la Borsa di Fortunatus molto in fretta e molto facilmente?'
'Davvero?' rispose Lady Muriel impazientemente, mentre ne prendeva un mucchietto in grembo e infilava l'ago. 'Vi prego, ditemi come fare, Mein Herr! Ne farò una prima di toccare un'altra goccia di tè!'
'Dovreste innanzitutto' disse Mein Herr, prendendo egli stesso due dei fazzoletti, stendendone uno sopra l'altro, e tenendoli per i due angoli, 'dovreste innanzitutto unire questi angoli superiori, il destro con il destro, il sinistro con il sinistro, e l'apertura tra di essi sarà l'apertura della Borsa'.
Pochi punti furono sufficienti per eseguire questa istruzione. 'Ora, se cucio assieme gli altri tre bordi', lei suggerì, 'la borsa è pronta?'
'Non così, Miladi: prima bisogna unire i bordi inferiori, ah, non così!' (perché lei stava cominciando a cucirli assieme). 'Capovolgete uno di essi, e unite l'angolo destro in basso di uno con l'angolo sinistro in basso dell'altro, e cucite i bordi inferiori in quella che chiamereste la maniera sbagliata!'

Figura 8.6: Attaccare disco a nastro di Moebius

'Vedo!' disse Lady Muriel, mentre eseguiva con destrezza l'ordine. 'E che borsa attorcigliata, scomoda, dall'aspetto inspiegabile ne vien fuori!?. Ma la morale è bella. La ricchezza senza limiti si può ottenere solo facendo le cose nel modo sbagliato! E come uniamo queste misteriose, no, voglio dire questa misteriosa apertura?' (intanto rigirava la cosa con aria interrogativa). 'Sì, è una sola apertura. Pensavo all'inizio che fossero due.'
'Conoscete l'enigma dell'Anello di Carta?' disse Mein Herr rivolto al Conte. 'In cui si prende una striscia di carta e si uniscono le estremità, dopo averne ruotata una, in modo da unire l'angolo superiore di una all'inferiore dell'altra?'
'Ne vidi uno già fatto, solo ieri', rispose il Conte. 'Muriel, bimba mia, non ne stavi costruendo uno per divertire i bambini che avevi per il tè?'
'Sì, conosco l'enigma, disse Lady Muriel,. 'L'Anello ha solo una superficie, e solo un bordo: è assai misterioso!'
'La borsa è proprio come quello, giusto?' suggerii. 'La superficie esterna di un suo lato non è continua con la superficie interna dell'altro lato?' 'È così!' lei esclamò. 'Solo che non è una borsa, finora. Come riempiremo questa apertura, Mein Herr?'
'In questo modo!' disse il vecchio con enfasi, prendendo la borsa dalle sue mani, e alzandosi in piedi nell'eccitazione della spiegazione. 'Il bordo dell'apertura consiste di quattro lati di fazzoletto, e potete seguirlo continuamente, tutto intorno all'apertura: giù dal bordo destro di un fazzoletto, su fino al bordo sinistro dell'altro, poi giù di nuovo lungo il bordo sinistro di uno e su lungo il bordo destro dell'altro!'
'Allora è vero!' mormorò Lady Muriel pensosamente, tenendosi la testa tra le mani, e guardando il vecchio seriamente. 'E ciò prova che c'è solo una apertura!' (...)
'Ora, questo terzo fazzoletto' continuò Mein Herr 'ha pure lui quattro bordi, che si possono seguire continuamente tutto intorno: ciò che dovete fare è unire i suoi quattro bordi ai quattro bordi dell'apertura. La Borsa è così completa, e la sua superficie esterna...'
'È vero!' lo interruppe impazientemente Lady Muriel. 'La sua superficie esterna sarà continua con quella interna!' Ma ci vorrà tempo. La cucirò dopo il tè.' Si stese di fianco alla borsa, e riprese in mano la sua tazza di tè. 'Ma perché la chiamate Borsa di Fortunatus, Mein Herr?'
Il caro vecchio era raggiante su di lei, con un sorriso allegro, e sembrava il Professore più che mai. 'Non vedete, bambina mia ? o dovrei dire Miladi? Tutto ciò che è dentro quella Borsa, è fuori di essa; e tutto ciò che è fuori, è dentro di essa. Così avete tutte le ricchezze del mondo in quella piccola Borsa!

Come abbiamo detto in precedenza Lady Muriel non riesce a portare a termine l'operazione suggerita da Main Herr infatti il piano proiettivo è chiuso e non orientabile, cosa che implica che la sua immagine non può essere rappresentata nelle 3 dimensioni senza autointersezioni. Tuttavia è possibile realizzare alcuni modelli di oggetti molto simili a questo lavorando all'uncinetto come proponiamo di seguito.

L'ultima proprietà del nastro di Moebius e del cilindro che consideriamo è l'orientabilità. Disegniamo, come in figura, delle frecce orientate su tutta la superficie della cintura e vediamo che nel caso del cilindro l'ultima freccia è orientata coerentemente con la prima, mentre nel caso del nastro di Moebius ci si accorge che l'ultima freccia e la prima girano in verso opposto. Diremo allora che il cilindro è orientabile mentre il nastro non lo è.

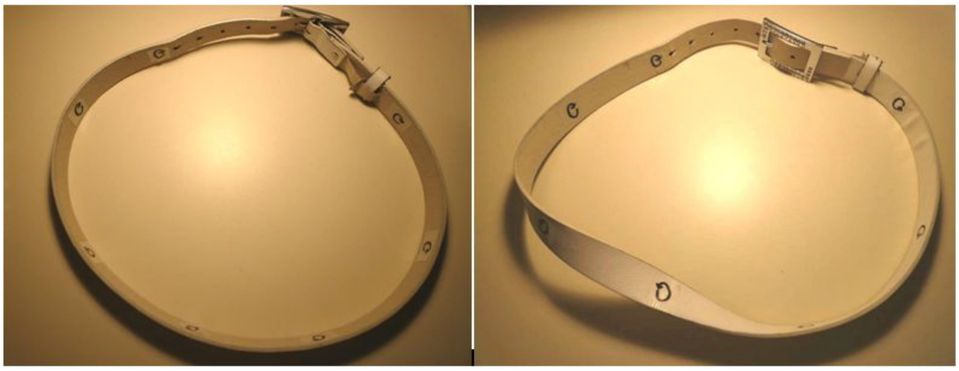


Figura 8.7: Orientabilità

Vogliamo far toccar con mano il lavoro di chi si occupa di topologia mostrando due oggetti geometrici che sono omeomorfi tra loro. Prendiamo un paio di pantaloncini corti da bambino (oppure un paio di slip) e un palloncino. Gonfiamo il palloncino all'interno dei pantaloni in modo che questi assumano la forma sferica. Tracciamo con un pennarello i bordi dei pantaloncini (della vita, delle gambe) sulla superficie del palloncino, lo sgonfiamo e lo rigonfiamo i modo da vedere il palloncino, cioè la sfera con tre i 'buchi', a cui i pantaloncini sono topologicamente equivalenti. Proponiamo la stessa cosa utilizzando delle magliette o altri indumenti, andando a sottolineare il fatto che in questi casi sono i buchi a caratterizzare le varie superfici.

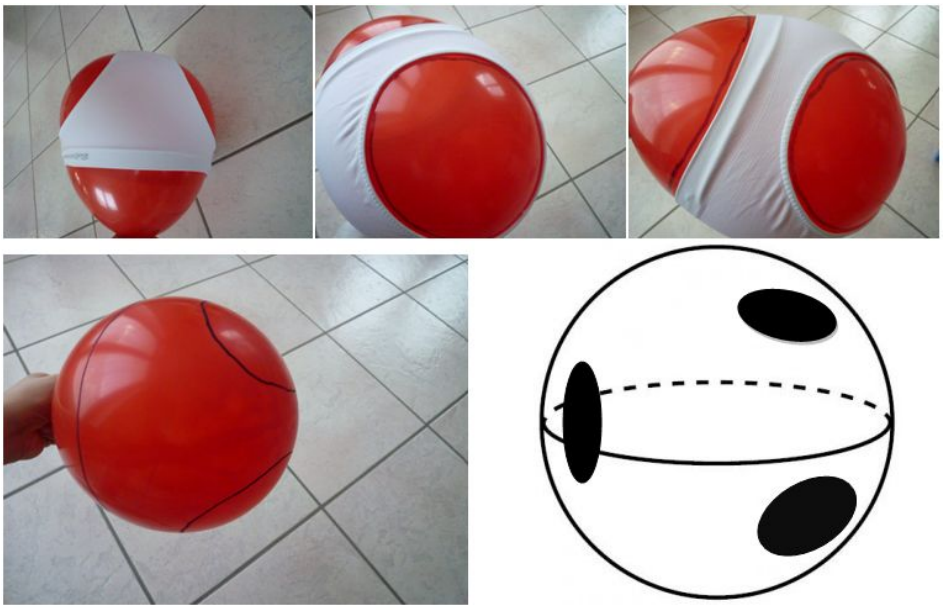


Figura 8.8: Omeomorfismo

Una proprietà importante è quindi la presenza o meno di buchi su una superficie. In topologia, il genere di una superficie viene definito, in maniera rigorosa, come il numero più grande di curve semplici chiuse disgiunte che possono essere disegnate sulla superficie senza separarla in due componenti connesse distinte. Intuitivamente il genere conta quanti 'buchi' presenta una superficie. Di seguito proponiamo alcuni esempi:

- una sfera ha genere 0: non ha buchi. Più rigorosamente, ogni curva chiusa tracciata su di essa la separa in due calotte sferiche;

- un toro (cioè una ciambella) ha genere 1: presenta infatti un solo 'buco'.

Riprendendo gli abiti proposti nell'attività precedente, si osserva che la maglietta ha genere 4 (4 buchi) e i pantaloni hanno genere 3 (3 buchi).

Prendiamo in esame una borsetta chiusa, semplice, con un manico, come quella in figura.

Essa può essere deformata in una sfera con un manico e avrà genere 1, presentando un unico buco. Facendo la stessa cosa con una borsa a 2 manici, si ha invece una superficie di genere 2. Se prendiamo invece delle borse aperte? Si potrebbe pensare che abbiano genere diverso. Invece no!! Queste

hanno lo stesso genere delle precedenti. La borsa aperta con due manici può essere stirata come nell'esempio precedente (sfera con buco omeomorfa a un disco), per ottenere un disco con ai lati due manici. Si ottiene quindi una superficie di genere due. Lo stesso procedimento vale per la borsa aperta con un manico.

## 8.2 Uncinetto e topologia

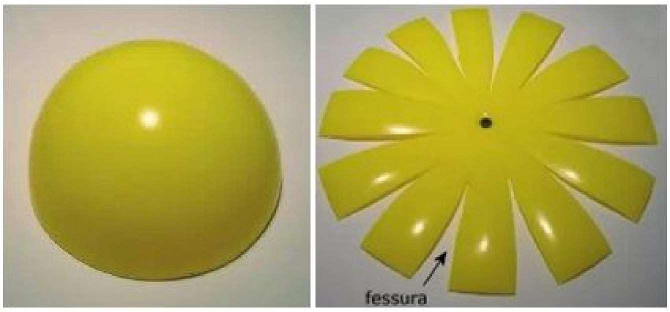
La geometria iperbolica è una geometria non euclidea ottenuta rimpiazzando il quinto postulato di Euclide cioè quello delle parallele con il cosiddetto postulato iperbolico. Due rette nel piano che non si intersecano in nessun punto sono dette parallele. Il quinto postulato di Euclide (o delle parallele) asserisce che, data una retta $r$ ed un punto $P$ non appartenente a $r$, esiste un'unica retta parallela passante per $P$. La geometria iperbolica è la geometria ottenuta modificando questo postulato, nel modo seguente:
Data una retta $r$ e un punto $P$ disgiunto da $r$, esistono almeno due rette distinte passanti per $P$ e parallele a $r$. I primi 4 assiomi di Euclide sono ancora validi.

Un piano iperbolico è una superficie la cui curvatura non è positiva come quella di una palla o nulla come il piano di un tavolo, ma negativa come quella di molti organismi, dall'insalata riccia, ad alcuni molluschi marini e certe cellule tumorali.

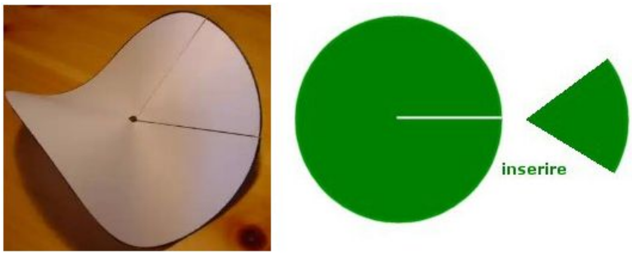
Definiamo, in maniera estremamente intuitiva il concetto di curvatura nulla, positiva o negativa di una superficie. L'idea principale è quella di 'schiacciare' la superficie sul piano. Quando si cerca di 'appiattire' una superficie curva si hanno tre possibilità:

1. Riusciamo ad appiattire la superficie, senza operare lacerazioni o sovrapposizioni. Diremo in questo caso che la superficie ha curvatura nulla (cioè in tutti punti della superficie la curvatura è nulla). Ad esempio qualsiasi regione di superficie cilindrica può essere resa perfettamente piatta ed ha quindi curvatura zero. Esso è collegato al fatto che una superficie cilindrica può ottenersi arrotolando un foglio di carta: esistono delle superfici che siamo abituati a considerare curve ma che, matematicamente, vanno considerate prive di curvatura.

2. Non riusciamo ad appiattire la superficie e si dovrebbero operare delle lacerazioni. E' quello che accade, ad esempio, con una regione di superficie sferica; possiamo pensare, affidandoci all'intuizione, che in questo caso ci sia 'meno superficie' di quanto ne serva per essere appiattita. In questo caso diremo che la superficie ha curvatura positiva. Nella fotografia seguente vedete un pallone che è stato tagliato a metà, lungo una circonferenza massima. Provando ad appiattirlo, non si riesce se non effettuando dei tagli radiali (maggiore sarà il numero di tagli e maggiore sarà l'aderenza al piano).




3. Non si riesce ad appiattire la superficie, perché si dovrebbero operare delle sovrapposizioni. E' quello che accade, ad esempio, con una regione di superficie a forma di sella; possiamo pensare, affidandoci di nuovo all'intuizione, che in questo caso ci sia 'più superficie' di quanta possa stare nel piano. In questo caso diremo che la superficie ha curvatura negativa. Nella fotografia seguente è possibile osservare una superficie a sella.

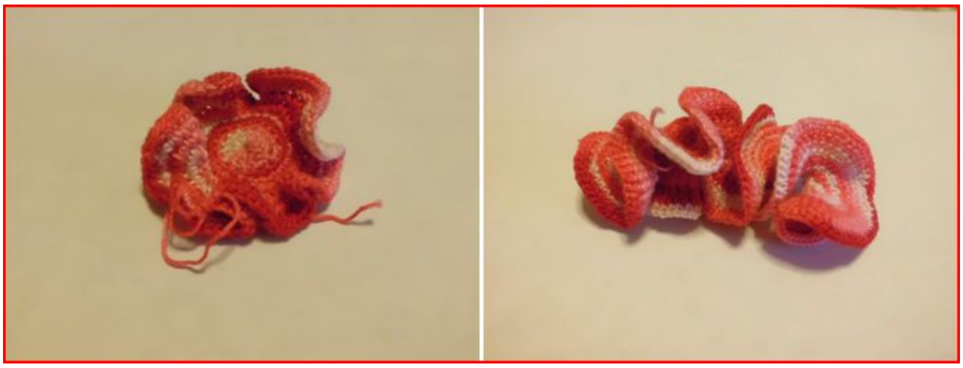
   
   

   È possibile ottenere questa superficie facilmente procedendo nel seguente modo. Disegnate su un foglio di carta un cerchio e un settore circolare con lo stesso raggio del cerchio e un'ampiezza di 60 gradi. Ritagliate il cerchio e il settore. Tagliate il cerchio lungo un suo raggio in modo che presenti una fessura. Inserite nella fessura il settore e fissatelo ai bordi della fessura. Naturalmente questa operazione di inserimento non è possibile se si rimane nel piano; ma potremo farlo se lasceremo flettere la superficie nella terza dimensione. Otterrete così una superficie a sella. Grazie a questa realizzazione è possibile capire che una sella occupa 'più superficie' di quanta possa stare nel piano.

Riemann nel 1854 diede questa definizione: *'La Geometria Iperbolica può essere considerata la geometria intrinseca di una superficie con curvatura costantemente negativa che si estende indefinitamente in tutte le direzioni'.* Su questo assunto si basa tutta la ricerca dei matematici che negli anni si sono dedicati a trovare la superficie iperbolica completa. Infatti, mentre è possibile trovare in natura esempi di superfici costantemente negative, tali superfici, purtroppo, non hanno la caratteristica di estendersi all'infinito. I matematici per molto tempo, dunque, hanno affermato che non era possibile ottenere nello spazio a tridimensionale euclideo, una superficie completa di un piano iperbolico (una superficie con curvatura costante negativa estesa all'infinito).

Nel 1954 Kuiper (un matematico tedesco) ipotizzò che una tale superficie potesse esistere, ma non spiegò come la si potesse costruire. Ci sono stati molti tentativi di realizzazione di un modello di piano iperbolico. Fu William Thurston nel 1970 ad avere l'idea di utilizzare strisce di carta per descrivere un piano iperbolico nello spazio tridimensionale ma essi erano estremamente delicati, rompendosi e spiegazzandosi.

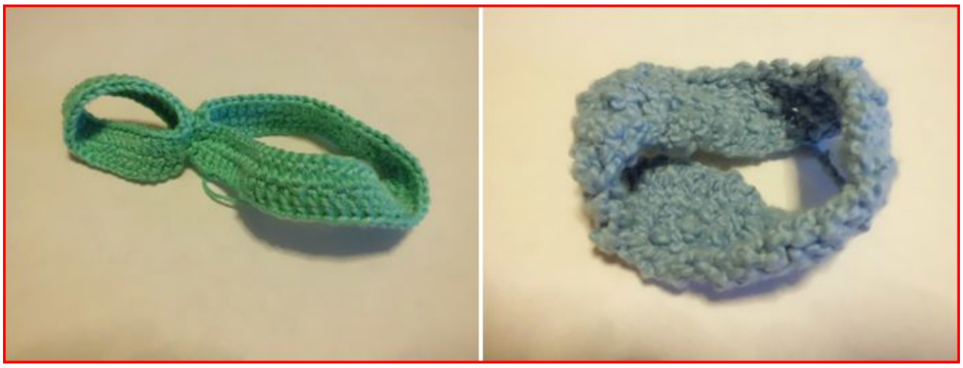
Nel 1997 Daina Taimina, una matematica della Cornell University, riuscì a risolvere uno dei problemi della matematica contemporanea: realizzare un modello fisico dello spazio iperbolico, che consentisse di vedere, toccare e visualizzare le proprietà valide in questa geometria non euclidea. La sua scoperta viene pubblicata su *Mathematical Intelligencer* nel 2001 e sul settimanale *New Scientist*. La cosa innovativa e incredibilmente femminile di questa innovazione, fu il fatto che ella utilizzò l'uncinetto. Da allora Daina Taimina tiene lezioni di uncinetto applicato alla geometria, dove i matematici presenti provano a realizzare piani iperbolici utilizzando questo tradizionale strumento femminile. Fatta la prima catenella, basta aumentare con un numero costante di maglie (una ogni 6 per esempio) ogni catena successiva. Si ottiene davvero un modello isometrico di un piano iperbolico simmetrico come si può vedere nelle seguenti foto.



Il concetto è semplice e rivoluzionario al tempo stesso, perché attraverso l'uso di una tecnica casalinga e alla portata di tutti, come l'uncinetto, si riesce a realizzare un modello tridimensionale che era stato considerato dagli studiosi irrealizzabile.

Attraverso l'esposizione di questi oggetti all'uncinetto vogliamo mostrare un modo alternativo di divulgare la scienza.

E' possibile realizzare anche altri oggetti geometrici con la tecnica dell'uncinetto o a maglia, per esempio nastri di Moebius, bottiglie di Klein, ecc...



Vogliamo sottolineare l'importanza dell'arricchimento che deriva dalla diversità delle esperienze e dal mescolamento delle discipline. L'innovazione è generata dalla capacità di utilizzare strumenti che per tradizione sono esclusivamente femminili in mondi che per tradizione sono esclusivamente maschili. Anche se: chi prenderebbe sul serio un matematico che lavora all'uncinetto?

## 8.3 Cappelli rossi, cappelli blu

Vogliamo far provare ai visitatori disponibili un semplice gioco legato alla probabilità e ai codici a correzione d'errore. È possibile giocare in squadre da 3 o 7 giocatori; per la spiegazione seguente andiamo a considerare il primo caso. Ai giocatori, senza che essi vedano, viene messo in testa un cappello che può essere o rosso o blu. Le scelte sono indipendenti tra di loro e i capelli vengono distribuiti in maniera casuale. I giocatori si collocano in cerchio e possono vedere il cappello degli altri ma non il proprio. Dopo alcuni minuti lasciati per la riflessione, i giocatori, al segnale stabilito, devono dire immediatamente o rosso o blu (cercando di indovinare il colore del proprio cappello) o passo. Una squadra vince se almeno un giocatore indovina il colore del proprio cappello e nessun giocatore ha sbagliato il colore del proprio cappello. I giocatori non possono parlare ma possono mettersi d'accordo sulla strategia da seguire.
Ci sono molte strategie ma nessuna permette di avere la certezza della vittoria; è necessario quindi trovare il modo di ottenere la massima probabilità di vittoria. I giocatori possono attuare una delle seguenti strategie intuitive:

- Si vince 1 volta su 2: tutti dicono passo tranne uno che dice un colore a caso tra rosso e blu;

- Si vince 3 volte su 4: se un giocatore vede due cappelli di colore diverso passa, se invece vede due cappelli dello stesso colore (per esempio blu) dice l'altro colore (cioè rosso). Si potrebbe pensare che se gli altri due cappelli sono blu è più probabile che il giocatore abbia in testa un cappello blu. In realtà il motivo non è questo infatti le scelte sono indipendenti ma se si considerano le possibili scelte queste sono: BBB, BBR, BRB, BRR, RBB, RBR, RRB, RRR. Utilizzando questa strategia scommettiamo che i cappelli non siano tutti 3 dello stesso colore, evento che si verifica 6 volte su 8. Se i cappelli sono tutti e tre dello stesso colore, tutti e tre i giocatori daranno la risposta sbagliata. Se i cappelli sono 2 di un colore e uno di un altro, i giocatori che vedono i cappelli dei compagni di colore diverso passeranno mentre quello che li vede uguali darà la risposta corretta.

Questo gioco divertente è legato ai codici a correzione d'errore fondamentale nel campo delle comunicazioni digitali in cui vengono spesso trasmesse informazioni attraverso dei canali disturbati. Verrà sottolineata l'importanza della presenza di dati ridondanti che permettono di individuare e/o correggere eventuali errori. È possibile ricordare come si ottengono i codici fiscali e i codici ISBN dei libri, cose curiose che molte persone ignorano. Solitamente i messaggi vengono inviati attraverso successioni di bit cioè 0 e 1. Consideriamo messaggi costituiti da 7 bit. Solitamente, per prevenire errori, vengono ripetuti dei dati secondo regole precise che vanno a determinare le parole codice, 'parole' del nostro 'vocabolario'. Supponiamo che rosso sia come 0 e blu come 1, nel gioco dei cappelli si vince se la distribuzione dei cappelli non è una parola codice. Ogni giocatore conosce tutti i bit tranne il suo ed è quindi indeciso tra la parola trasmessa e una a distanza uno da essa. Se entrambe le distribuzioni non equivalgono a delle parole codice, il giocatore deve tacere; altrimenti il giocatore deve scegliere quella che non è una parola codice. Se la distribuzioni dei cappelli rappresenta una parola codice allora tutti e tre i giocatori sbagliano. È possibile dare anche degli esempi scritti con 0 e 1 ma la parte più interessante è la sperimentazione, il tentativo di trovare strategie alternative e capire quanto la matematica, in questo caso l'algebra, è fondamentale per la vita di tutti i giorni.

## 8.4 3x2 e vari sconti moltiplicativi

Al mercato si parla spesso del tre per due. Anche ciò che sembra un fatto ormai assolutamente scontato (in tutti i sensi), può invece mostrarsi come una cosa estremamente interessante. Vogliamo proporre, infatti, in questa parte come è possibile fare le moltiplicazioni e magari chiedere al pubblico perché funzionano alcuni metodi. Per esempio facciamo calcolare 8 per 8? Facciamo contare ad uno sulla mano: pollice, sei; indice, sette; medio, otto. L'altro otto sarà invece sul medio dell'altra mano. Facciamo poi congiungere i due medi e a questo punto il numero delle decine saranno le dita fino a quelle due che si toccano (comprese): tre da una parte e tre dall'altra e cioè sei. Le unità sono il prodotto delle dita rimanenti, quelle oltre i due medi che si toccano: due per due che fa quattro. Si ottengono quindi sei decine e quattro unità e cioè sessantaquattro! È possibile fare testare la stessa tecnica anche con altri numeri. Si può prendere per esempio sei per nove. Il sei è il pollice, il nove l'anulare. Congiungendo, le decine sono cinque mentre le dita restanti sono quattro da una parte e una dall'altra e quindi il prodotto di queste fa quattro. Il risultato finale, come si conosce dalla scuola elementare, è cinque decine e quattro unità e cioè cinquantaquattro. Esistono infatti molti modi per fare le moltiplicazioni, oltre a quello che viene insegnato a scuola. Un altro esempio è il seguente metodo indiano che farà stupire senza dubbio il pubblico. Proponiamo, dunque, di calcolare velocemente il prodotto 91 per 88. Dopo un iniziale smarrimento, indichiamo agli ascoltatori il metodo risolutivo:

- facciamo scrivere i due numeri uno sotto l'altro:
  91 al cento $\rightarrow$ 9
  88 al cento $\rightarrow$ 12
- facciamo calcolare 9 per 12
  91 al cento $\rightarrow$ 9
  88 al cento $\rightarrow$ 12
  $=^{1}$ 08
- facciamo sottrarre 12 da 91, che fa 79 (oppure 9 da 88, che fa sempre 79: è la stessa cosa). Questo numero, aumentato del riporto scritto in piccolo, dà 80.
  $$79 + 108 = 8008$$

Il risultato è appunto 8008! Che magia!

Si potrebbe, inoltre, esporre un altro metodo che ha il vantaggio di essere applicato anche a numeri molto più grandi e può servire per fare le moltiplicazioni a mente. È interessante per il pubblico conoscere anche la storia in questo caso tragica di come i diversi metodi sono stati inventati. Un prigioniero di un campo di concentramento nazista, per non impazzire, si inventò questi algoritmi rapidi per moltiplicare tra loro i numeri. Per riuscire a mantenere una certa lucidità esercitava il cervello in moltiplicazioni estremamente lunghe. Vogliamo calcolare 34 per 23, l'algoritmo è il seguente:
I. Moltiplichiamo le unità (4 e 3) ottenendo 12. Il 2 sarà l'ultima cifra, l' 1 dovrà essere sommato al risultato della prossima tappa;
II e III. Moltiplichiamo le decine di ciascun numero con le unità dell'altro numero: 4 per 2 = 8; 3 per 3 = 9; quindi sommiamo i prodotti aggiungendo il riporto precedente: 8 + 9 + 1 = 18. L' 8 sarà la cifra delle decine, l' 1

dovrà essere sommato al risultato della prossima tappa;
IV. Moltiplichiamo tra loro le decine: 3 per 2 = 6 e sommiamo il risultato al riporto precedente: 6 + 1 = 7. Il 7 sarà la prima cifra del numero finale, che è 782.
È necessario ricordarsi un po' dei riporti e questo è un buon esercizio per testare la memoria del pubblico!

Quest'ultimo algoritmo è interessante non solo per la rapidità di calcolo ma esso viene usato anche nei computer per fare delle moltiplicazioni tra numeri con moltissime cifre. È infatti un modo per dimezzare il numero delle operazioni che si fanno. Certamente anche la procedura che tutti conoscono dalla scuola è una procedura piuttosto efficiente, però molto spesso viene presentata come l'unica possibile, e dunque può accadere che essa perda il suo fascino. Per i ragazzi e per chi vuole cimentarsi, proponiamo delle sfide con scontri di calcolo di moltiplicazioni nel quale possono essere testati i nuovi metodi proposti precedentemente e ne emerge l'effettiva efficacia!

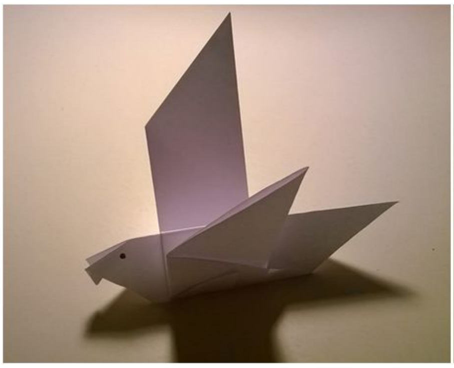
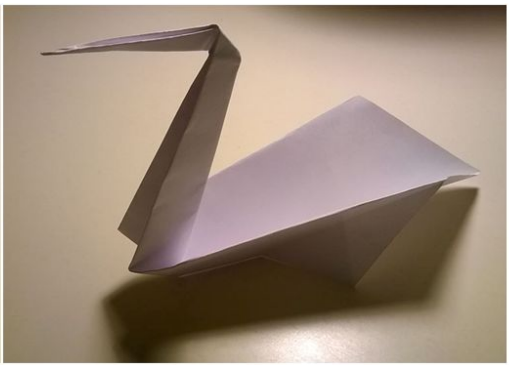
L'obiettivo di questa attività è quindi quello di rivedere un argomento estremamente comune come quello delle moltiplicazioni trattato a scuola in maniera standard, ma da un diverso e curioso punto di vista. Si vuol, inoltre, trasmettere che in matematica è possibile risolvere problemi anche semplici in innumerevoli modi diversi e che il matematico cerca sempre la via più corta e più veloce!

# Capitolo 9

# Altre possibili bancarelle

Altre bancarelle che proponiamo nella mostra, che però non descriviamo nel dettaglio, sono le seguenti:

- **bancarella dei tendaggi**: gli oggetti presenti su questa bancarella possono essere utilizzati per trattare argomenti come gli origami (confrontando gli assiomi di Euclide con gli assiomi degli origami), il problema di Didone (per far stupire il pubblico), tangram, ecc;

- **bancarella dei palloncini e palloni**: essa permette di confrontare varie figure geometriche (palloni da calcio con pallone da rugby, sfere ed ellissoidi), tassellazione di superfici, storia della forma geometrica dei palloni da calcio;

- **bancarella degli oggetti casalinghi**: anche in questo caso vengono trattati degli argomenti di topologia confrontando quindi oggetti che sono tra loro omeomorfi.

# Capitolo 10

# Conclusioni

La progettazione della mostra ci ha fatto riflettere molto su cosa significa comunicare la scienza. Abbiamo potuto toccare con mano e provare le difficoltà che si incontrano. Abbiamo capito che la comunicazione scientifica non è semplice soprattutto se il pubblico a cui ci si rivolge è estremamente vasto e presenta una formazione e istruzione diversa. In particolare parlare di matematica è difficile presentando un linguaggio specifico che non può essere utilizzato con l'uomo medio. Per esempio è difficile spiegare a persone non addette ai lavori che un disco è contraibile a un punto o il concetto di successione.

Per la progettazione della mostra abbiamo fissato ritrovi settimanali e realizzato un gruppo facebook, che ci ha permesso di condividere idee, immagini, video costantemente. Ogni scelta è stata presa dopo un confronto con tutti i membri del gruppo e abbiamo cercato di dar spazio alla creatività considerando sempre le nostre possibilità e le nostre conoscenze. Le foto e i disegni, che compaiono all'interno di questa relazione, sono stati realizzati da noi e sono la testimonianza di alcune attività interattive svolte effettivamente. Durante tutta la fase di progettazione ci siamo confrontate con conoscenti e amici per capire le opinioni che avevano riguardo al nostro progetto. La maggior parte delle persone ha risposto con entusiasmo, chiedendo di una possibile realizzazione della mostra stessa. C'è stato molto di aiuto il contributo datoci dai docenti e dai membri del Muse durante le lezioni. Questi ultimi ci hanno presentato diversi aspetti dell'ambiente museale, nonché della parte organizzativa delle mostre da cui abbiamo preso spunto. Durante tutta la fase di progettazione ci siamo mantenute in costante aggiornamento leggendo molteplici libri e consultando i siti scientifici che ci sono stati proposti a lezione. Fondamentale è stato, inoltre, il libro *Comunicare la scienza* di G. Carrada.