Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in matematica
A.A. 2010/2011
7 giugno 2011

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3$ il 3–spazio euclideo ordinario dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z). Definiamo il piano affine Π e, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la retta affine $r(k)$ di $\mathbb{R}^3$ ponendo

$$\Pi : x + y + z = 3 \qquad \text{e} \qquad r(k) : \begin{cases} x - ky = 1 \\ y + z = 1. \end{cases}$$

Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo che:

(1) $r(k)$ sia parallela a Π;

(2) $r(k)$ intersechi Π con un angolo di $\pm\pi/4$;

(3) $r(k)$ sia sghemba alla retta affine di $\mathbb{R}^3$ passante per $P(2, 0, 2)$ e per $Q(2, 1, 4)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ il piano proiettivo complesso numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ponendo

$$\mathcal{C} : \; 5x_1^2 - x_2^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 = 0.$$

Si determini la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ ed una proiettività $T : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $\mathcal{D} = T^{-1}(\mathcal{C})$.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid \; a, b \in \mathbb{R}\}$.

(1) Si provi che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}$. Sia τ la topologia su $\mathbb{R}$ avente per base $\mathcal{B}$.

(2) Si dica, motivando la risposta, se $\mathbb{R}$ con la topologia τ è connesso oppure no.

(3) Si provi che tutte le funzioni continue $(\mathbb{R}, \varepsilon) \to (\mathbb{R}, \tau)$ sono costanti, dove ε denota la topologia euclidea su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Sull'insieme $S^1 \times [0, 1]$ si consideri la relazione d'equivalenza $\sim$ definita da

$$(x, t) \sim (y, s) \iff (x, t) = (y, s) \text{ o } x = y \text{ e } |t - s| = 1.$$

(1) Provare che $X = S^1 \times [0, 1]/\sim \; \cong S^1 \times S^1$.

(2) Dire, motivando la risposta, se lo spazio X, definito al punto precedente è omeomorfo al sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da $Y = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = z^2 + t^2\}$.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Dato $k \in \mathbb{R}$, la retta $r(k)$ è parallela al piano Π se e soltanto se l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo
$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-ky &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$
è una retta. Grazie al torema di Rouchè-Capelli, ciò equivale a dire che
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$
D'altra parte, tale determinante è uguale a $-k$ e quindi $r(k)$ è parallela a Π se e soltanto se $k = 0$.

2. Un vettore normale a Π è dato da $n = (1,1,1)$. Calcoliamo un vettore direzione di ciascuna $r(k)$.

   Sia $k \in \mathbb{R}$. Risolviamo il sistema lineare omogeneo:
$$\begin{cases} x-ky &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= ky \\ z &= -y \end{cases},$$
   le cui soluzioni sono
$$Sol = \{(ky, y, -y)^t \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} = \langle (k, 1, -1)^t \rangle.$$
   Dunque una direzione di $r(k)$ è data dal vettore $v(k) = (k, 1, -1)^t$.

   Sia $k \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ in modo che $r(k)$ intersechi Π. La retta $r(k)$ interseca Π con un angolo di $\pm\pi/4$ se e soltanto se
$$\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\langle n, v(k)\rangle}{||n|| \cdot ||v(k)||} \quad \Leftrightarrow \quad \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k+1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{k^2+2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{k^2}{3(k^2+2)}$$
   ovvero
$$3k^2 + 6 = 2k^2 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + 6 = 0.$$
   Poiché $k^2 + 6 = 0$ non ha soluzioni reali, concludiamo che $r(k)$ non interseca Π con un ungolo di $\pm\pi/4$ per alcun k.

3. Una direzione della retta r passante per P e Q è data da $\overrightarrow{PQ} = (2,1,4) - (2,0,2) = (0,1,2)$. Ponendo $y = 0$ nelle equazioni di $r(k)$ otteniamo $x = 1$ e $z = 1$. Segue che il punto $R(1,0,1) \in r(k)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. La condizione "$r(k)$ è sghemba a r" è equivalente a

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{RP} \\ v(k) \\ \overrightarrow{PQ} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Poiché tale determinante è uguale a $k + 3$, la precedente condizione equivale a $k \neq -3$.

Esercizio 2.

La matrice associata a $\mathcal{C}$ è la seguente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A = -4 \neq 0$, $\mathrm{rk}A = 3$, $\mathcal{C}$ è una conica generale di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ con forma canonica $\mathcal{D}$ data dall'equazione cartesiana

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Calcoliamo ora una proiettività $S : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $\mathcal{C} = S^{-1}(\mathcal{D})$, utilizzando la tecnica del completamento dei quadranti nell'equazione di $\mathcal{C}$. Completiamo successivamente i quadrati relativi a x_2 e a x_0:

$$\begin{aligned} 5x_1^2 - x_2^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 &= -x_2^2 + 2x_0x_2 - \mathbf{x_0^2} + \mathbf{x_0^2} + 5x_1^2 + 2x_0x_1 = \\ &= -(x_2 - x_0)^2 + x_0^2 + 2x_0x_1 + \mathbf{x_1^2} - \mathbf{x_1^2} + 5x_1^2 = \\ &= (i(x_2 - x_0))^2 + (x_0 + x_1)^2 + (2x_1)^2 \end{aligned}$$

Definiamo S ponendo ad esempio

$$S([x_0, x_1, x_2]) := [x_0 + x_1,\ 2x_1,\ ix_2 - ix_0].$$

Per costruzione, $\mathcal{C} = S^{-1}(\mathcal{D})$ ovvero $\mathcal{D} = S(\mathcal{C}) = (S^{-1})^{-1}(\mathcal{C})$.

Definiamo $T := S^{-1}$. Calcoliamo T. Sia $\varphi_S : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'automorfismo lineare di $\mathbb{C}^3$ associato alla proiettività S. La matrice associata a φ_S rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^3$ è la seguente:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}.$$

L'inversa di M è data da

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}.$$

Dunque si ha

$$T([x_0, x_1, x_2]) = \left[x_0 - \frac{1}{2}x_1,\ \frac{1}{2}x_1,\ x_0 - \frac{1}{2}x_1 - ix_2\right] = [2x_0 - x_1,\ x_1,\ 2x_0 - x_1 - 2ix_2].$$

Esercizio 3.

1. Bisogna provare che

   (a) $\mathbb{R} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$,

   (b) per ogni A, $B \in \mathcal{B}$ e per ogni $x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C \subseteq A \cap B$.

   Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $x \in [x, x+1) \in \mathcal{B}$ e quindi $\mathbb{R} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, questo prova la (a). Inoltre è immediato verificare che per ogni $a < b$ e $c < d$ si ha che

$$[a,b) \cap [c,d) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } b \leq c \text{ o } d \leq a \\ [c,b) & \text{se } a \leq c < b \leq d \\ [c,d) & \text{se } a \leq c < d \leq b \\ [a,b) & \text{se } c \leq a < b \leq d \\ [a,d) & \text{se } c \leq a < d \leq b \end{cases}$$

   Quindi se A, $B \in \mathcal{B}$ e $A \cap B \neq \varnothing$ allora $A \cap B \in \mathcal{B}$. Ma allora se $x \in A \cap B$, basta prendere $C = A \cap B$ per avere anche la (b).

2. $(\mathbb{R}, \tau)$ è sconnesso. Si considerino $U = (-\infty, 0)$ e $V = [0, +\infty)$. Chiaramente U e V sono non vuoti, $U \cup V = \mathbb{R}$ e $U \cap V = \varnothing$. Proviamo che U e V sono aperti (rispetto a τ. A tal fine osserviamo che

$$U = \bigcup_{x<0} [x, 0) \qquad V = \bigcup_{x>0} [0, x)$$

   e quindi U e V sono aperti in quanto unione di elementi di $\mathcal{B}$.

3. Osserviamo che con lo stesso ragionamento usato nel punto 2, si prova che per ogni $x \in \mathbb{R}$ gli insiemi $(-\infty, x)$ e $[x, +\infty)$ sono aperti rispetto a τ, e nuovamente la loro intersezione è vuota e la loro unione è $\mathbb{R}$.

   Proviamo che gli unici sottospazi connessi di $(\mathbb{R}, \tau)$ sono quelli costituiti da un solo punto. Infatti sa $A \subset \mathbb{R}$ possiede due punti $x < y$, preso z tra x e y (ad esempio $z = (x+y)/2$) si avrebbe immediatamente che $x \in A \cap (-\infty, z)$ e $y \in A \cap [z, +\infty)$ e quindi A risulta sconnesso.

   Ma allora, se $f : (\mathbb{R}, \varepsilon) \to (\mathbb{R}, \tau)$ è continua, dato che $(\mathbb{R}, \varepsilon)$ è connesso allora $f(\mathbb{R})$ è connesso in $(\mathbb{R}, \tau)$ e quindi è costituito da un solo punto, ossia esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(\mathbb{R}) = \{c\}$ ovvero $f(x) = c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.

1. Si consideri l'applicazione $f : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times S^1$

$$f(x,t) = (x, (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(x,t) = f(y,s) &\iff x = y \text{ e } \cos(2\pi t) = \cos(2\pi s) \text{ e } \sin(2\pi t) = \sin(2\pi s) \\ &\iff x = y \text{ e } \exists\, k \in \mathbb{Z} : 2\pi s - 2\pi t = 2\pi k \\ &\iff x = y \text{ e } s - t \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = y \text{ e } |s-t| = 1 \\ &\iff (x,t) \sim (y,s). \end{aligned}$$

Resta quindi definita una funzione continua e bigettiva

$$\widetilde{f} : S^1 \times [0,1]/\sim\ \to S^1 \times S^1.$$

Ora S^1 e $[0,1]$ sono compatti, quindi $S^1 \times [0,1]$ è compatto, dunque anche $S^1 \times [0,1]/\sim$ è compatto; S^1 è di Hausdorff e quindi anche $S^1 \times S^1$ è di Hausdorff. Dato che una funzione continua e bigettiva da un compatto a un Hausdorff è un omeomorfismo, la funzione $\widetilde{f}$ definita sopra è un omeomorfismo.

2. Abbiamo già mostrato al punto precedente che lo spazio X è compatto. Proviamo che Y non lo è.

Osserviamo che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, detto $P_\lambda = (\lambda, 0, \lambda, 0)$ si ha che $P_\lambda \in Y$. Inoltre $\|P_\lambda\| = |\lambda| \cdot \|(1,0,1,0)\| = |\lambda|\sqrt{2}$ e quindi Y non è limitato. Dato che un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato, Y non può essere compatto e quindi non è omeomorfo a X.