1. Considerare l'applicazione lineare $F_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - ky + 4z \\ (1+k)x + (2-k)y + (k-1)z \\ x + k^2 y + (1-2k)z \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

   (a) Per quali valori di k, F_k ammette inversa? Calcolare, per tali valori, il determinante della matrice associata ad F_k^{-1}.

   (b) Determinare una base per il nucleo di F_k ed una base per l'immagine di F_k.

   (c) Stabilire per quali valori di k il vettore $(1, -2, -1)$ appartiene all'immagine di F_k.

2. Determinare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} k-9 & 6 & k-1 \\ -12 & k+9 & k-2 \\ 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix}$$

Stabilire per quali valori di k l'applicazione lineare associata ad A_k è diagonalizzabile.

3. Sia $T : V \longrightarrow V$ una trasformazione lineare (i.e. un opertore lineare).

   (a) Si diano le definizioni di autovettore e di autovalore per T.

   (b) Si definisca il polinomio caratteristico di T e si discuta la sua relazione con gli autovalori di T.

   (c) Enunciare un criterio per la diagonalizzabilità dell'operatore T.