1 Esercizi di Ist. di Geometria Superiore I

1. Dimostrare che la funzione $|z|^2$ non è derivabile in senso complesso in nessun dominio di $\mathbf{C}$

2. Determinare per quali costanti $a, b, c \in \mathbf{R}$ sono derivabili in senso complesso le seguenti funzioni:

   a) $z = x + iy \mapsto f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

   b) $z = x + iy \mapsto f(z) = x^2 + ay^2 + i(bxy + c)$

3. Dimostrare che se una funzione f olomorfa su $\Omega \in \mathbf{C}$, aperto e connesso e $f' \equiv 0$ su Ω, allora f è costante.

4. Sia f una funzione olomorfa su $\mathbf{C}$ tale che $|f(z)| = 1$, $\forall z \in \mathbf{C}$. Dimostrare che f è costante. Si noti che l'asserto è una facile conseguenza del teorema di Liouville, qui si chiede di dimostrarlo senza usare questo risultato. (Sugg. Scrivere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, allora l'ipotesi diventa $u^2 + v^2 = 1$ che derivata rispetto a x ed y...)
   Cosa succede se si assume $|f(z)| = k$, dove $k \in \mathbf{R}$?

5. Verificare che le condizioni di Cauchy Riemann equivalgono alle formule $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \tau}$ e $\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial v}{\partial \nu}$, ove $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è un versore qualunque di $\mathbf{R}^2$ e $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$.

6. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3 z^{3n}}{(3n)!}$

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n}(3n+2)!}{n^4+1} z^n$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$

   e) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$

   f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n^2+2)2^n}$

7. Trovare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ di centro i.

8. Calcolare $\int_\gamma \frac{z}{|z|} dz$, $z \in \mathbf{C}$
   dove $\gamma = [-2, -1] \cup \{e^{i\theta} : \theta \in [0, \Pi]\} \cup [1, 2] \cup \{2e^{i\theta} : \theta \in [0, \Pi]\}$, percorso in senso antiorario.

9. Calcolare $\int_C \overline{z}^2 dz$ nei seguenti casi:

   a) $C = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$
   b) $C = \{z \in \mathbf{C} : |z - 1| = 1\}$

10. Sia $\gamma : [a, b] \Rightarrow \Omega$ un arco di curva di classe C^1. $f \in C^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbf{C}$, aperto. Dimostrare che:

    $\overline{\int_\gamma f(z)dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}dz$

    Se $\gamma = \{|z| = 1\}$ dimostrare che:

    $\overline{\int_\gamma f(z)dz} = -\int_{\overline{\gamma}} \frac{\overline{f(z)}}{z^2}dz$

11. Siano $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ un aperto, $z_0 \in \Omega$. Dimostrare che se f è la restrizione a $\Omega \setminus \{z_0\}$ di una funzione g olomorfa in Ω, allora lo sviluppo in serie di Laurent di f coincide con lo sviluppo in serie di Taylor di g.

12. Come è noto lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione puo' essere scritto come somma di due serie con indici positivi, ovvero $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z - z_0)^n$.
    La prima di queste ultime due somme viene detta "parte regolare", mentre la seconda viene detta "parte singolare" dello sviluppo.
    Studiare, dove ha senso, la parte regolare e singolare dello sviluppo delle seguenti funzioni:

    a) $f(z) = \frac{1}{z^2}$
    b) $f(z) = (z - z^2)^{-1}$
    c) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

13. Trovare lo sviluppo in serie di Laurent, in corrispondenza alla singolaritá indicata per ciascuna delle seguenti funzioni. Determinare la regione di convergenza di ciascuna delle serie.

    a) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}; \quad z = 1$
    b) $f(z) = \frac{z}{z^2+3z+2}; \quad z = -2$
    c) $f(z) = \frac{z-sinz}{z^3}; \quad z = 0$
    d) $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)^2}; \quad z = 3$

14. Calcolare, in ciascuna delle loro singolaritá, i residui delle funzioni:

    a) $\frac{1}{z^2-1}$
    b) $tan(z)$
    c) $e^{\frac{2}{z}}$
    d) $zsin(\frac{1}{z})$

2 Istruzioni per la consegna

Gli esercizi vanno svolti tutti, ma da consegnare per l'esame sono quelli selezionati di seguito.
Esercizi 1), 2), 4), uno a scelta tra 3) e 5), due dell'esercizio 6); uno tra 8), 9a) e 9b); uno tra 10) e 11); uno del 12); uno del 13); uno del 14).