Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in matematica
A.A. 2010/2011
27 giugno 2011

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e, per ogni $i \in \{0, 1, 2\}$, sia H_i la retta proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita dall'equazione cartesiana $x_i = 0$. Definiamo le rette proiettive r_0, r_1 e r_2 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ponendo

$$r_0 : x_0 + x_1 - x_2 = 0, \qquad r_1 : \begin{cases} x_0 = -s \\ x_1 = t \\ x_2 = t + s \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si calcolino le intersezioni $r_0 \cap r_1$, $r_0 \cap r_2$ e $r_1 \cap r_2$.

(2) Si scriva esplicitamente una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(H_i) = r_i$ per ogni $i \in \{0, 1, 2\}$ e $f([1, 1, 1]) = [1, 0, 5]$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ il piano affine reale numerico dotato del riferimento affine standard di coordinate omogenee (x, y). Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo la conica $\mathcal{C}(k)$ di $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ ponendo

$$\mathcal{C}(k) : \ (k^2 - 1)x^2 - y^2 + 2xy - 2ky + k - 2 = 0$$

Si determini la forma canonica di $\mathcal{C}(k)$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Inoltre, nei casi in cui $\mathcal{C}(k)$ risulta essere un'iperbole degenere, si calcolino equazioni cartesiane delle rette in cui $\mathcal{C}(k)$ si decompone.

Esercizio 3. Dato $p \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme

$$\tau_p = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid p \in A\} \cup \{\emptyset\}.$$

(1) Si provi che τ_p è una topologia su $\mathbb{R}$.

(2) Si provi che lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau_p)$ è connesso. È connesso per archi?

(3) Si dica se $(\mathbb{R}, \tau_0)$ è compatto oppure no.

(4) Si provi che ogni bigezione $f : (\mathbb{R}, \tau_0) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$ tale che $f(0) = 1$ è un omeomorfismo.

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tra loro omeomorfi e quali no:

$$\begin{aligned} X &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\} \\ Y &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le 1\} \\ Z &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2 \le 1\} \\ W &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2 \ge 1\} \end{aligned}$$

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Definiamo $A_0 := [1,0,0]$, $A_1 := [0,1,0]$, $A_2 := [0,0,1]$ ed $A := [1,1,1]$.
   Calcoliamo $\{B_0\} = r_1 \cap r_2$:
   $$0 = (-s)+t+(t+s) = 2t \qquad \Rightarrow \qquad t = 0,$$
   $$Sol = \{(-s,0,s)^t \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,0,1)^t\rangle \qquad \Rightarrow \qquad B_0 = [-1,0,1].$$
   Calcoliamo $\{B_1\} = r_0 \cap r_2$:
   $$\begin{cases} x_0+x_1-x_2 = 0 \\ x_0+x_1+x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0+x_1-x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$
   $$Sol = \{(-x_0,x_0,0)^t \in \mathbb{R}^3 : x_0 \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,0)^t\rangle \qquad \Rightarrow \qquad B_1 = [-1,1,0].$$
   Calcoliamo $\{B_2\} = r_0 \cap r_1$:
   $$0 = (-s)+t-(t+s) = -2s \qquad \Rightarrow \qquad s = 0,$$
   $$Sol = \{(0,t,t)^t \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\} = \langle(0,1,1)^t\rangle \qquad \Rightarrow \qquad B_2 = [0,1,1].$$

2. Proviamo che i punti A_0, A_1, A_2 ed A di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono in posizione generale. Definiamo $E_0 := (1,0,0)$, $E_1 := (0,1,0)$, $E_2 := (0,0,1)$ ed $E := (1,1,1)$. Poiché $\{E_0, E_1, E_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, è sufficiente provare che esistono numeri reali μ_0, μ_1, μ_2 tutti diversi da zero tali che $\mu_0E_0 + \mu_1E_1 + \mu_2E_2 = E$. Evidentemente, vale
   $$\mu_0 = 1 \neq 0, \qquad \mu_1 = 1 \neq 0, \qquad \mu_2 = 1 \neq 0.$$
   Proviamo che anche i punti B_0, B_1, B_2 e $B = [1,0,5]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono in posizione generale. Definiamo $F_0 := (-1,0,1)$, $F_1 := (-1,1,0)$, $F_2 := (0,1,1)$ ed $F := (1,0,5)$. Osserviamo che $\{F_0, F_1, F_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, infatti vale
   $$\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Proviamo che esistono numeri reali $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ tutti diversi da zero tali che $\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = F$. Risolviamo il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \lambda_0 - \lambda_1 & = & 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_2 & = & 6 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_0 & = & 2 \neq 0 \\ \lambda_1 & = & -3 \neq 0 \\ \lambda_2 & = & 3 \neq 0 \end{cases}$$

Poichè $A_0,\ A_1,\ A_2$ ed A di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono in posizione generale ed anche $B_0,\ B_1,\ B_2$ e B lo sono, esiste un'unica proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(A_i) = B_i \text{ per ogni } i \in \{0, 1, 2\} \text{ e } f(A) = B.$$

L'automorfismo lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato ad f ha la seguente proprietà:

$$\begin{cases} \varphi(\mu_0 E_0) = \lambda_0 F_0 \\ \varphi(\mu_1 E_1) = \lambda_1 F_1 \\ \varphi(\mu_2 E_2) = \lambda_2 F_2 \end{cases} \qquad \text{o equivalentemente} \begin{cases} \varphi(E_0) = \frac{\lambda_0}{\mu_0} F_0 \\ \varphi(E_1) = \frac{\lambda_1}{\mu_1} F_1 \\ \varphi(E_2) = \frac{\lambda_2}{\mu_2} F_2 \end{cases}$$

Poichè $\mu_0 = 1,\ \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1,\ \lambda_0 = 2,\ \lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 3$ vale

$$\begin{cases} \varphi((1,0,0)^t) = (-2, 0, 2)^t \\ \varphi((0,1,0)^t) = -3(-1, 1, 0)^t = (3, -3, 0)^t \\ \varphi((0,0,1)^t) = (0, 3, 3)^t \end{cases}$$

Segue che

$$\varphi((x_0, x_1, x_2)^t) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_0 + 3x_1 \\ -3x_1 + 3x_2 \\ 2x_0 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$f([x_0, x_1, x_2]) \quad = \quad [-2x_0 + 3x_1,\ -3x_1 + 3x_2,\ 2x_0 + 3x_2]$$

Esercizio 2.

Sia $k \in \mathbb{R}$. La matrice associata a $\mathcal{C}(k)$ è data da

$$A(k) = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & -k \\ 0 & k^2 - 1 & 1 \\ -k & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Denotiamo con $A_0(k)$ la sottomatrice $A(k)(2,3|2,3)$ di $A(k)$, cioè

$$A_0(k) = \begin{pmatrix} k^2-1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vale $\det A(k) = -k^2(k^2+k-3)$ e quindi

$$\det A(k) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = 0 \ \text{ oppure } \ k = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Inoltre si ha $\det A_0(k) = -k^2$ e quindi

$$\det A_0(k) < 0 \qquad \text{se} \qquad k \neq 0,$$
$$\det A_0(k) = 0 \qquad \text{se} \qquad k = 0.$$

Segue che:

- se $k \notin \{(-1-\sqrt{13})/2, 0, (-1+\sqrt{13})/2\}$, allora $\mathcal{C}(k)$ è un'iperbole con forma canonica $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
- se $k = 0$, allora $\mathcal{C}(k)$ è una parabola degenere con forma canonica $y^2 + 1 = 0$;
- se $k \in \{(-1-\sqrt{13})/2, (-1+\sqrt{13})/2\}$, allora $\mathcal{C}(k)$ è un'iperbole degenere con forma canonica $x^2 - y^2 = 0$.

Osserviamo che

$$\mathcal{C}\left((-1 \pm \sqrt{13})/2\right) : \ (5 \mp \sqrt{13})x^2 - 2y^2 + 4xy - 2(-1 \pm \sqrt{13})y - (5 \mp \sqrt{13}) = 0.$$

Completando i quadrati relativi a y, otteniamo:

$$\mathcal{C}\left((-1 \pm \sqrt{13})/2\right) : \left(6x + y(1 \mp \sqrt{13}) - 6\right)\left(2x + y(3 \pm \sqrt{13}) + 2\right) = 0.$$

In tal modo $\mathcal{C}\left((-1+\sqrt{13})/2\right)$ si decompone nelle rette

$$6x + y(1 - \sqrt{13}) - 6 = 0 \ \text{ e } \ 2x + y(3 + \sqrt{13}) + 2 = 0,$$

mentre $\mathcal{C}\left((-1-\sqrt{13})/2\right)$ si decompone nelle rette

$$6x + y(1 + \sqrt{13}) - 6 = 0 \ \text{ e } \ 2x + y(3 - \sqrt{13}) + 2 = 0.$$

Esercizio 3.

1. Ovviamente $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau_p$. Proviamo che τ_p è chiusa per unione. Se $\mathcal{A} \subseteq \tau_p$ allora si hanno due casi: o per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha $A = \emptyset$, oppure esiste $A_0 \in \mathcal{A}$ tale che $A_0 \neq \emptyset$ e in tal caso $p \in A_0$. Nel primo caso $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset \in \tau$, nel secondo caso $p \in A_0 \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ e quindi $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau_p$.

   Proviamo ora che τ_p è chiusa per intersezione finita. Siano $A_1, \ldots, A_n \in \tau_p$. Si hanno due casi o uno di essi è vuoto e allora $\bigcap_i A_i = \emptyset \in \tau_p$ oppure sono tutti non vuoti e quindi $p \in A_i$ per ogni i. Ma allora $p \in \bigcap_i A_i$ e quindi $\bigcap_i A_i \in \tau_p$.

2. Evidentemente due aperti non vuoti contengono entrambi p e quindi la loro intersezione è non vuota, quindi lo spazio è connesso. È anche connesso per archi. Proviamo che se $x \in \mathbb{R}$ allora esiste un cammino da p ad x. Questo basta per dedurne la tesi.

   Consideriamo la curva $\gamma : [0,1] \to X$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} p & \text{se } t \in [0,1) \\ x & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

   Chiaramente $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = x$. Proviamo che γ è continua.

   Sia $A \in \tau_p$ allora:

   - o $A = \emptyset$ e quindi $\gamma^{-1}(A) = \emptyset$,
   - oppure $p \in A$ e allora

$$\gamma^{-1}(A) = \begin{cases} [0,1] & \text{se } x \in A \\ [0,1) & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

   In ogni caso la controimmagine di un aperto non banale è un aperto dell'intervallo $[0,1]$.

3. Lo spazio non è compatto. Per ogni $x \neq 0$ si consideri l'aperto $A_x = \{0, x\}$ chiaramente $\mathbb{R} = \bigcup_{x \neq 0} A_x$. D'altra parte osserviamo che per ogni $y, x \in \mathbb{R}$, $y \in A_x$ se e solo se $y = x$. Di conseguenza si ha che se dal ricoprimento si toglie anche un solo aperto, quello che si ottiene non è più un ricoprimento.

4. Sia f una bigezione con $f(0) = 1$. Proviamo che $f : (\mathbb{R}, \tau_0) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$ è continua. Sia $A \in \tau_1$ ossia $1 \in A$, allora $0 = f^{-1}(1) \in f^{-1}(A)$ che quindi è aperto in τ_0.

   In modo completamente analogo si prova che f è aperta e quindi che f è un omeomorfismo.

   Viceversa sia f un omeomorfismo. Osserviamo che $\{0\}$ è aperto in τ_0 e quindi $f(\{0\}) = \{f(0)\}$ è aperto in τ_1 per cui $1 \in \{f(0)\}$ ossia $f(0) = 1$.

Esercizio 4.

Proveremo i seguenti fatti:

1. X è compatto e connesso per archi;
2. $Y \cong Z$ e sono entrambi non compatti e connessi;
3. W è sconnesso.

Dunque Y e Z sono gli unici ad essere tra loro omeomorfi.

1. X è un disco chiuso, dunque è chiuso e limitato e quindi è compatto.

   Se $x, y \in X$ allora la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = tx+(1-t)y$ è contenuta in X, infatti

   $$\|\gamma(t)\| = \|tx + (1-t)y\| \leq \|tx\| + \|(1-t)y\| = t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq t + (1-t) = 1.$$

   Chiaramente γ è continua e $\gamma(0) = y$ e $\gamma(1) = x$.

2. Osserviamo che $Y = [-1,1] \times \mathbb{R}$ e quindi sicuramente è connesso in quanto prodotto di connessi e non è compatto in quanto uno dei suoi fattori ($\mathbb{R}$) non lo è.

   Per provare che $Y \cong Z$ consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

   $$f(x,y) = (x\sqrt{1+y^2}, y).$$

   È immediato verificare che $f(Y) = Z$ e che la funzione definita da

   $$g(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}, y\right)$$

   ne è l'inversa. Essendo entrambe continue ne consegue che i due spazi sono omeomorfi.

3. Siano U e V i due aperti disgiunti di $\mathbb{R}^2$ definiti da $U = \{(x,y) \mid x < 0\}$ e $V = \{(x,y) \mid x > 0\}$.

   Osserviamo che $U \cup V \supseteq W$. Infatti $\mathbb{R}^2 \setminus (U \cup V) = \{(x,y) \mid x = 0\}$ e W non contiene punti del tipo $(0,y)$ dato che $0^2 - y^2 \leq 0 < 1$ per ogni y.

   Proviamo ora che $U \cap W \neq \emptyset$ e $V \cap W \neq \emptyset$, per farlo basta osservare che $(-1,0) \in U \cap W$ e che $(1,0) \in U \cap W$. Dunque W è sconnesso.