Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2011/2012

11 giugno 2012

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3$ il 3-spazio euclideo dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z) e sia π il piano definito da

$$\pi : 3x - y + 2z - 1 = 0$$

Sia $P = (1, 0, -3)$ un punto di $\mathbb{E}^3$.

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si determinino le equazioni parametriche e cartesiane della retta r perpendicolare a π e passante per P.
(2) Si calcoli la distanza del punto P dal piano π.
(3) Sia Q il punto sulla retta r a distanza $\frac{1}{2}d(P, \pi)$ da π e situato dalla stessa parte del semispazio delimitato da π in cui si trova P. Si determini l'equazione del piano σ parallelo a π e passante per Q.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il piano affine dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y). Definiamo la conica $\mathcal{C}(k)$ di $\mathbb{A}^2$ come

$$\mathcal{C} : \quad (2k - 1)x^2 + 2ky^2 + 6kxy + 2x = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si determini la forma canonica di $\mathcal{C}(k)$ al variare di k.
(2) Nel caso in cui la conica risulti degenere, si calcolino le equazioni cartesiane delle rette o della retta che formano $\mathcal{C}(k)$.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, siano dati i seguenti sottospazi

$$\begin{aligned}
A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 2)^2 = 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y + 2)^2 = 4\} \\
B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 3\} \\
C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 3)^2 = 4\}
\end{aligned}$$

Dire se siano o meno omeomorfi tra loro, motivando la risposta.

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{R}^2$ munito della topologia euclidea e si definisca la seguente relazione d'equivalenza:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x = x' \neq \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = x' = \frac{1}{2}, y = y'.$$

Si dimostri che $\mathbb{R}^2/\sim$ è T_1 ma non è Hausdorff.

Soluzioni

※ Esercizio 1.

(1) Ogni retta perperdicolare al piano π avrà direzione data dal vettore normale al piano $v = (3, -1, 2)$. La retta r è dunque la retta con direzione $v = (3, -1, 2)$ e passante per $P = (1, 0, -3)$:

$$r = \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

Ricaviamo ora le equazione cartesiane:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2y + z = -3 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ 2y + z + 3 = 0 \end{cases} .$$

(2) La distanza del punto P dal piano π è data da

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) - 1|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{|3 - 6 - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

(3) Il punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ appartiene alla retta r e verifica quindi

$$\begin{cases} x_0 = 1 + 3t \\ y_0 = -t \\ z_0 = -3 + 2t \end{cases}$$

Inoltre è a distanza esattamente $\frac{2}{\sqrt{14}}$ dal piano π, verifica cioè

$$d(Q, \pi) = \frac{|3x_0 - 1y_0 + 2z_0 - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Mettendo insieme le due cose, si ottiene

$$2 = |3x_0 - 1y_0 + 2z_0 - 1| = |3(1 + 3t) - 1(-t) + 2(-3 + 2t) - 1| =$$
$$= |3 + 9t + t - 6 + 4t - 1| = |14t - 4|$$

e dunque

$$14t = 4 \pm 2 \quad \rightarrow t = \frac{2 \pm 1}{7}$$

e dunque

$$t_1 = \frac{3}{7}, \qquad t_2 = \frac{1}{7}.$$

Chiaramente ambedue i punti $Q_1 = \left(\frac{16}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{15}{7}\right)$ e $Q_2 = \left(\frac{10}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{19}{7}\right)$ appartengono alla retta r e stanno a distanza $\frac{2}{\sqrt{14}}$ dal piano π. Il punto che interessa a noi è quello appartente allo stesso semispazio in cui si trova anche P, cioè quello a distanza minore da P. Poiché il punto P corrisponde al valore del parametro $t = 0$, il punto più vicino a P è quello corripondente al valore di t più piccolo, cioè Q_2.

L'equazione del piano σ parallelo a π e passante per Q_2 sarà del tipo

$$3x - y + 2z + D = 0.$$

Per trovare D basta imporre il passaggio per Q_2, cioè risolvere l'equazione

$$3 \cdot \frac{10}{7} + \frac{1}{7} - 2\frac{19}{7} + D = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 7D = 38 - 1 - 30 = 7$$

$$\iff D = 1.$$

L'equazione del piano σ è dunque

$$\sigma: \quad 3x - y + 2z + 1 = 0.$$

※ Esercizio 2.

(1) Consideriamo le matrici associate alla conica $\mathcal{C}(k)$ date da

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2k-1 & 3k \\ 0 & 3k & 2k \end{pmatrix}, \qquad A_0(k) = \begin{pmatrix} 2k-1 & 3k \\ 3k & 2k \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2k-1 & 3k \\ 0 & 3k & 2k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3k & 2k \end{vmatrix} = -2k$$

La conica $\mathcal{C}(k)$ è dunque non degenere se e solo se $k \neq 0$. Calcolando anche

$$\det A_0(k) = -k(5k+2).$$

Studiamo i vari casi. Si ha:

$$\begin{cases} \det A > 0 \iff k < 0, \\ \det A < 0 \iff k > 0, \\ \det A = 0 \iff k = 0. \end{cases}$$

e inoltre

$$\begin{cases} \det A_0 > 0 \iff -\frac{2}{5} < k < 0, \\ \det A_0 < 0 \iff k < -\frac{2}{5} \vee k > 0, \\ \det A_0 = 0 \iff k = 0 \vee k = -\frac{2}{5}, \end{cases}$$

La classificazione della conica $\mathcal{C}(k)$ è data dunque da

- Per $k \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup (0, \infty) \quad \to \quad \mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere.
- Per $k \in \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \quad \to \quad \mathcal{C}$ è un'ellisse non degenere.
- Per $k = -\frac{2}{5} \quad \to \quad \mathcal{C}$ è una parabola non degenere.
- Per $k = 0 \quad \to \quad \mathcal{C}$ è una conica degenere.

Per determinare se l'ellisse è a punti reali o non reali bisognerebbe sapere il segno degli autovalori di $A_0(k)$ per $k \in \left(-\frac{2}{5}, 0\right)$ (a priori potrebbero essere ambedue positivi o ambedue negativi, sappiamo solo che il loro prodotto è positivo). Ci suono due modi possibili. Il primo è calcolare la traccia (la quale corrisponde alla somma degli autovalori). In questo caso

$$\mathrm{tr}(A_0(k)) = 4k - 1$$

ed è negativa per $k \in \left(-\frac{2}{5}, 0\right)$. Quindi gli autovalori sono negativi. Il secondo modo è utilizzare il fatto che gli autovalori variano con continuità rispetto al parametro k e dunque per ottenere un loro segno, anziché calcolarli in generale, basta sostituire un valore di k appartenente all'intervallo indicato. Per esempio

$$A_0\left(-\frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $\frac{1}{5}(5t^2 + 9t + 1)$ ed autovalori entrambi negativi

$$\lambda_1 = \frac{1}{10}(-9 - \sqrt{61}), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{10}(-9 + \sqrt{61}).$$

La forma canonica è dunque del tipo $-x^2 - y^2 + 1 = 0$ ed è dunque un'ellisse a punti reali.

In particolare, le forme canoniche sono date da

- Per $k \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup (0, \infty) \quad \to \quad \mathcal{C}: \quad x^2 - y^2 - 1 = 0.$
- Per $k \in \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \quad \to \quad \mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$
- Per $k = -\frac{2}{5} \quad \to \quad \mathcal{C}: \quad y^2 - x = 0.$
- Per $k = 0 \quad \to \quad \mathcal{C}: \quad y^2 - 1 = 0.$

Per completare la classificazione, studiamo il caso $k = 0$. La matrice $A(0)$ diventa:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A(0)$ ha rango 2, per $k = 0$ la conica $\mathcal{C}(0)$ è un conica semplicemente degenere, ovvero una coppia di rette distinte.

(2) La conica risulta degenere solo nel caso $k = 0$. In questo caso l'espressione della conica è data da

$$\mathcal{C}(0): \quad -x^2 + 2x = 0.$$

Poiché $-x^2 + 2x = x(2 - x)$, la conica $\mathcal{C}(0)$ si decompone nelle rette di equazione

$$x = 0, \qquad x = 2.$$

※ Esercizio 3.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Circ}((0,2),2) \cup \operatorname{Circ}((0,-2),2) \\ B &= \operatorname{Circ}((0,0),\sqrt{2}) \cup \operatorname{Circ}((0,0),\sqrt{3}) \\ C &= \operatorname{Circ}((0,1),1) \cup \operatorname{Circ}((0,3),2). \end{aligned}$$

In altri termini, A è dato dall'unione di due circonferenze con un solo punto in comune (il punto $(0,0)$), B è dato dall'unione di due circonferenze concentriche ma con raggi differenti, C è dato dall'unione di due circonferenze con due punti in comune.

Osserviamo subito che B è sconnesso mentre A e C non lo sono. Infatti

$$B = \left(B \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2,5\right\}\right) \cup \left(B \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 2,5\right\}\right).$$

Da questo segue subito che

$$B \not\approx A, \qquad B \not\approx C.$$

Osserviamo inoltre che A meno il punto $(0,0)$ è sconnesso, mentre non è mai possibile sconnettere C togliendo un solo punto. Ciò dimostra che nemmeno A e C sono omeomorfi, in quanto se tale omeomorfismo $f: A \to C$ esistesse, allora indurrebbe un omeomorfismo anche tra

$$f: A \setminus \{(0,0)\} \to C \setminus \{f(0,0)\},$$

ma ciò è impossibile, in quando il primo è sconnesso mentre il secondo non lo è.

In conclusione, non esistono omeomorfismi tra i tre spazi sopra elencati.

※ Esercizio 4.

Sia $\pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ la proiezione naturale. Si osservi che

$$\pi^{-1}([(x_0, y_0)]) = \begin{cases} \{(x_0, y) \ : \ y \in \mathbb{R}\} & \text{se } x_0 \neq \frac{1}{2} \\ (x_0, y_0) & \text{se } x_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Cerchiamo di capire come sono fatti gli aperti nel quoziente. Gli aperti di $\mathbb{R}^2/\sim$ sono gli insiemi $U \subset \mathbb{R}^2/\sim$ tali che $\pi^{-1}(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$. Sia U un insieme di $\mathbb{R}^2/\sim$ e sia $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proiezione sul primo fattore, cioè $p_1(x,y) = x$. Allora

$$\pi^{-1}(U) = \begin{cases} \{(x_0,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_0 = p_1(w), [w] \in U\} & \text{se } \forall [w] \in U \quad p_1(w) \neq \frac{1}{2} \\ \left\{(x_0,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_0 = p_1(w) \neq \frac{1}{2}, [w] \in U\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{2},y\right) \ : \ \left[\left(\frac{1}{2},y\right)\right] \in U\right\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Spieghiamo meglio. Nel caso in cui U non contenga elementi del tipo $\left[\left(\frac{1}{2},y\right)\right]$, ogni suo elemento è dato da

$$[(x,y)] = [(x,0)]$$

poiché stiamo supponendo $x \neq \frac{1}{2}$. In questo senso, si può vedere il quoziente come l'unione delle due rette $\{y=0\}$ e $\left\{x = \frac{1}{2}\right\}$ in $\mathbb{R}^2$. Detto $V = \{x \in \mathbb{R} \ : \ [(x,0)] \in U\} \subset \mathbb{R}$, si ha dunque

$$\pi^{-1}(U) = \begin{cases} V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 & \text{se } \forall [w] \in U \quad p_1(w) \neq \frac{1}{2} \\ (V \setminus \{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}) \cup \left\{\left(\frac{1}{2},y\right) \ : \ \left[\left(\frac{1}{2},y\right)\right] \in U\right\} & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

Siano $[q_1] = [(q_1^1, q_1^2)]$ e $[q_2] = [(q_2^1, q_2^2)]$ due punti di $\mathbb{R}^2/\sim$ tali che $q_1^1 \neq q_1^2$ e $q_1^1 \neq \frac{1}{2}$. Dimostriamo che in questo caso troviamo due aperti U_1 ed U_2 che verificano l'assioma T1 e T2, cioè tali che

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad [q_1] \in U_1, \quad [q_2] \in U_2, \quad [q_1] \notin U_2, \quad [q_2] \notin U_1.$$

Sia $d \in \mathbb{R}$ la distanza tra q_1^1 e q_1^2 e definiamo, per qualche $\varepsilon > 0$, gli insiemi

$$U_1 = \{[(x,y)] \in \mathbb{R}^2/\sim : \ x \in (q_1^1 - d/4, q_1^1 + d/4), \ y \in \mathbb{R}\},$$

$$U_2 = \{[(x,y)] \in \mathbb{R}^2/\sim : \ x \in (q_2^1 - d/4, q_2^1 + d/4), \ y \in \mathbb{R}\}.$$

Per costruzione si ha

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad [q_1] \in U_1, \quad [q_2] \in U_2, \quad [q_1] \notin U_2, \quad [q_2] \notin U_1.$$

Resta solo da dimostrare che sono aperti. Si ha

$$\pi^{-1}(U_i) = \left(q_i^1 - \frac{d}{4}, q_i^1 + \frac{d}{4}\right) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$$

il quale è aperto in $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo allora due punti del tipo $[q_1] = \left[\left(\frac{1}{2}, y_1\right)\right]$ e $[q_2] = \left[\left(\frac{1}{2}, y_2\right)\right]$ con $y_1 \neq y_2$ e dimostriamo che in questo caso è verificato l'assioma T1 ma non l'assioma T2. Dimostriamo che non esistono intorni disgiunti. Ricordiamo che un segmento aperto (cioè un insieme del tipo $\{x_0\} \times (a,b)$) in $\mathbb{R}^2$ non è un aperto di $\mathbb{R}^2$, in quanto il suo complementare non è un chiuso.[1]

Ricordando l'equazione 1, ciò significa che un intorno U di un punto del tipo $\left[\left(\frac{1}{2}, y_1\right)\right]$ non può essere solo un segmentino verticale (altrimenti $\pi^{-1}(U)$ non sarebbe un aperto), ma deve per forza contenere anche punti del tipo $[(x,y)]$ con $x \neq \frac{1}{2}$. Gli intorni di $[q_1]$ e $[q_2]$ sono dunque del tipo

$$U_i = \left\{[(x,y)] \in \mathbb{R}^2/\sim : \ x \in \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_i, \frac{1}{2} + \varepsilon_i\right), y \in (y_i - \delta_i, y_i + \delta_i)\right\}.$$

Tali insiemi sono aperti in quanto

$$\pi^{-1}(U_i) = \left(\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_i, \frac{1}{2} + \varepsilon_i\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \mathbb{R}\right) \cup \left(\left\{\frac{1}{2}\right\} \times (y_i - \delta_i, y_i + \delta_i)\right)$$

[1] La chiusura del complementare è tutto $\mathbb{R}$, non l'insieme stesso. Il complementare non coincide dunque con la sua chiusura e non è dunque un chiuso.

è un aperto di $\mathbb{R}^2$. Poiché tali due aperti non potranno mai essere disgiunti, questo dimostra che $\mathbb{R}^2/\sim$ non è Hausdorff. È invece possibile fare in modo che U_1 ed U_2 verifichino l'assioma T1: scegliendo infatti $\delta_1 = \delta_2 = |y_1 - y_2|/4$ si ottiene

$$[q_1] \in U_1, \quad [q_2] \in U_2, \quad [q_1] \notin U_2, \quad [q_2] \notin U_1, \quad U_1 \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Quanto detto dimostra che $\mathbb{R}^2/\sim$ è T_1 ma non è Hausdorff.