INFORMAZIONI

- La seconda provetta è il giorno Martedì 8 Gennaio alle ore 14:00.
- Il primo appello è il giorno Martedì 22 Gennaio alle ore 14:00
- Il secondo appello è il giorno Giovedì 14 Febbraio alle ore 14:00
- Seguiranno poi altri 3 appelli: Giugno, Luglio e Settembre.
- Sia alla seconda provetta che agli appelli valgono le solite regole: no electronics, no libri appunti dispense, solo foglio A4 fronte/retro, penna e documento identità valido con foto.

INFORMAZIONI

- Alla seconda provetta sono ammessi coloro che hanno preso almeno 16 alla prima provetta .
- Agli appelli può partecipare chiunque, indipendentemente da esiti negativi di precedenti prove.
- Il voto finale con le due provette verrà pubblicato in tempo per iscriversi eventualmente al primo appello.
- Gli argomenti della seconda provetta saranno solo quelli svolti dopo la prima provetta (più o meno dalla convessità compresa in poi).
- Gli argomenti degli appelli saranno invece su tutto il programma svolto.
- Sia la seconda provetta che gli appelli consistono di 8 domande a risposta multipla e di 3 esercizi da svolgere, il tutto in un tempo di 3 ore.
- Il voto della prima provetta e il voto della seconda provetta verranno mediati con pesi diversi: tendenzialmente la seconda pesa un po’ di più (con pesi da decidere a posteriori).

INFORMAZIONI

- L’esame è scritto e orale. Si può decidere di non sostenere la prova orale ma, senza far l’orale, il voto registrato è quello ottenuto allo scritto (media pesata dei voti delle due provette o voto dell’appello) riscalato secondo la seguente tabella:

INFORMAZIONI

- 30 → 27
- 29 → 26
- 28 → 25
- 27 → 24
- 26 → 24
- 25 → 23
- 24 → 22
- 23 → 22
- 22 → 21
- 21 → 20
- 20 → 20
- 19 → 19
- 18 → 18

INFORMAZIONI

- Alla prova orale si chiedono generalmente, definizioni, enunciati, dimostrazioni e esempi e/o controesempi.
- L’esito della prova orale può modificare il voto dello scritto (quello vero) in positivo o in negativo o anche dare esito “respinto” (ma finora non e’ mai successo…)
- La prova orale va sostenuta entro la medesima sessione della prova scritta: a Gennaio o a Febbraio per le due provette e il primo appello; a Febbraio per il secondo appello; a Giugno o a Luglio per il terzo appello; a Luglio per il quarto appello; a Settembre per il quinto appello.

INFORMAZIONI

- Le date delle prove orali verranno comunicate al momento della pubblicazione dei voti dello scritto degli appelli.
- La prova orale della seconda provetta coinciderà con quella del primo o del secondo appello.
- Chi viene respinto alla prova orale e chi rifiuta il voto sia dello scritto che quello dopo l’eventuale prova orale, deve rifare lo scritto.

INFORMAZIONI

- Chi supera la prova scritta con le due provette deve comunque iscriversi al primo appello (perché solo gli appelli sono verbalizzanti su Esse3) e verrà reinserito il voto ottenuto con le due provette.
- Il voto agli appelli verrà inserito nella forma “silenzio assenso”, e quindi ci saranno 7 giorni di tempo per accettare o rifiutare il voto. Passati i 7 giorni i voti non rifiutati verranno considerati come accettati e quindi verbalizzati.

INFORMAZIONI

- All’interno dei sette giorni ci saranno la presa visione degli elaborati corretti e le eventuali prove orali.
- Chi desidera sostenere la prova orale nel secondo appello disponibile (sempre però all’interno della medesima sessione: invernale, estiva, autunnale) deve comunicarlo ufficialmente per email e quindi rifiutare il voto su Esse3 che verrà quindi ricaricato per l’appello successivo (al quale si deve comunque iscrivere).

INFORMAZIONI

- **E’ possibile ritentare il compito senza perdere il voto già acquisito?**
- Sì alle seguenti condizioni:
- La cosa può essere fatta solo all’interno della stessa sessione di esami (invernale: provette, primo appello, secondo appello; estiva: terzo appello, quarto appello; autunnale quinto appello).
- Ovvero:
- si può riprovare lo scritto senza perdere il voto delle provette al primo appello e al secondo appello; si può riprovare lo scritto senza perdere il voto del primo appello al secondo appello; non si può riprovare lo scritto senza perdere il voto del secondo appello.

INFORMAZIONI

- Si può riprovare lo scritto senza perdere il voto del terzo appello al quarto appello; non si può riprovare lo scritto senza perdere il voto del quarto appello.
- Dopo il quinto appello non è possibile ritentare lo scritto.
- Per ritentare uno scritto senza necessariamente perdere un voto precedente occorre: rifiutare il voto precedente su Esse3, iscriversi all’appello utile successivo, comunicare al docente per email che si intende riprovare lo scritto senza perdere il voto già acquisito, comunicarlo anche il giorno dell’appello stesso.
- All’appello del ritentativo: 1) consegno: il compito viene corretto e il voto precedente non è più valido (è perso) e vale solo il voto del ritentativo (qualunque esso sia: positivo, negativo, migliore, peggiore…); 2) mi ritiro: scrivo “R, tengo voto precedente” sul compito, consegno l’elaborato, comunico al docente in aula la mia decisione; l’elaborato non viene corretto e rimane valido il voto precedente, che sarà reinserito su Esse3.

INFORMAZIONI

- Metterò sulla mia pagina queste slides di informazioni.
- Per altre (se necessarie) informazioni scrivetemi: fabio.bagagiolo@unitn.it
- Dopo Natale ricevimento su appuntamento

DUE SLIDES DUE SULLE SERIE DI FOURIER

- Abbiamo visto che talvolta è possibile scrivere una funzione come serie di potenze (tramite la sua serie di Taylor). Questo vorrebbe dire approssimare la funzione con polinomi che cambiano uno dall'altro solo per l'aggiunta del termine di potenza *n*-esima. Le condizioni per questa possibilità sono però molto stringenti: esistenza di tutte le derivate di ogni ordine, e non solo.
- E se la funzione non è infinitamente derivabile? Se magari è solo continua o neppure continua? Se c'è anche la sola integrabilità, allora qualcosa forse si può fare.
- L'idea delle serie di Fourier è quella di approssimare non con i normali polinomi (algebrici) ma con i cosiddetti <u>polinomi trigonometrici</u>.
- Un polinomio trigonometrico è una scrittura del del tipo

$$3\cos(x)+2\sin(x)+4\cos(2x)-2\sin(2x)+\cos(3x)-6\sin(4x)$$

o più in generale : polinomio trigonometrico di grado k

$$\sum_{n=0}^{k}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

DUE SLIDES DUE SULLE SERIE DI FOURIER

- Si dice serie di Fourier di coefficienti a_0, a_n , b_n $n>0$, la scrittura

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

- Le domande sono: questa serie converge per qualche *x*?, data una funzione *f* è possibile scriverla come una serie di Fourier? Cioè

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

- In tal caso chiamiamo il secondo membro <u>serie di Fourier di *f*.</u>
- Se sì, come faccio a determinare i coefficienti a_n , b_n?
- Notiamo subito che se vale l'uguaglianza qui sopra allora *f* deve essere 2π - periodica.
- Come per le serie di Taylor, data una funzione, possiamo forse individuare i candidati coefficienti, ma poi questo non garantirà che la serie converge e che converge proprio alla funzione data.
- Se le due serie dei coefficienti a_n , b_n sono assolutamente convergenti, allora la serie di Fourier converge per ogni *x* reale; questo discende immediatamente dal teorema del confronto per serie e dalla disuguaglianza

$$\left|a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right|\le\left|a_n\right|+\left|b_n\right|$$

- Se *n,m* sono numeri naturali, valgono le seguenti relazioni (che si possono provare con un po' di conti come quelli fatti a lezione per calcolare una primitiva di seno al quadrato). Notare che gli integrali definiti sono su un periodo *[-π,π]*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } m = n = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{se } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0 \quad \forall n, m$$

- Sia quindi *f* una funzione *2*π - periodica. Supponiamo che sia esprimibile in serie di Fourier $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$ e che si possa integrare termine a termine. Allora, per un fissato numero naturale *k* (*k>0* nel secondo caso), per le relazioni precedenti, otteniamo

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)\right)\cos(kx)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos(kx)dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(kx)dx\right)\right)=a_k$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)\right)\sin(kx)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin(kx)dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(kx)dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)dx\right)\right)=b_k$$

- Ne seguono le seguenti relazioni fondamentali

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

- Quindi, per calcolare i coefficienti di Fourier di una funzione *2*π - periodica, basta calcolare gli integrali qui sopra.
- Notiamo che affinché quegli integrali (e quindi i coefficienti di Fourier) esistano, basta la sola integrabilità di *f*. In generale non serve nemmeno la sua continuità!
- Un possibile risultato di convergenza è il seguente:
- Sia f una funzione *2*π - periodica integrabile e continua a tratti (cioè è possibile dividere l'intervallo *]-*π*,*π*[* in un numero finito di sotto-intervalli aperti su cui *f* è continua e "salta" sugli estremi, ma i limiti agli estremi esistono.). In particolare *f* può essere continua. Allora la serie di Fourier di *f* converge a *f(x)* in ogni punto *x* di Dirichlet di *f* e converge al punto medio del salto nei punti di salto.

Punti di Dirichlet

Definition 2.56 *Given a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and a point $x_0 \in \mathbb{R}$, we say that the function f satisfies the Dirichlet condition in x_0 if at least one of the following facts hold*

i) f admits derivative in x_0;

ii) f is continuous in x_0 and admits right derivative and left derivative in x_0, respectively:

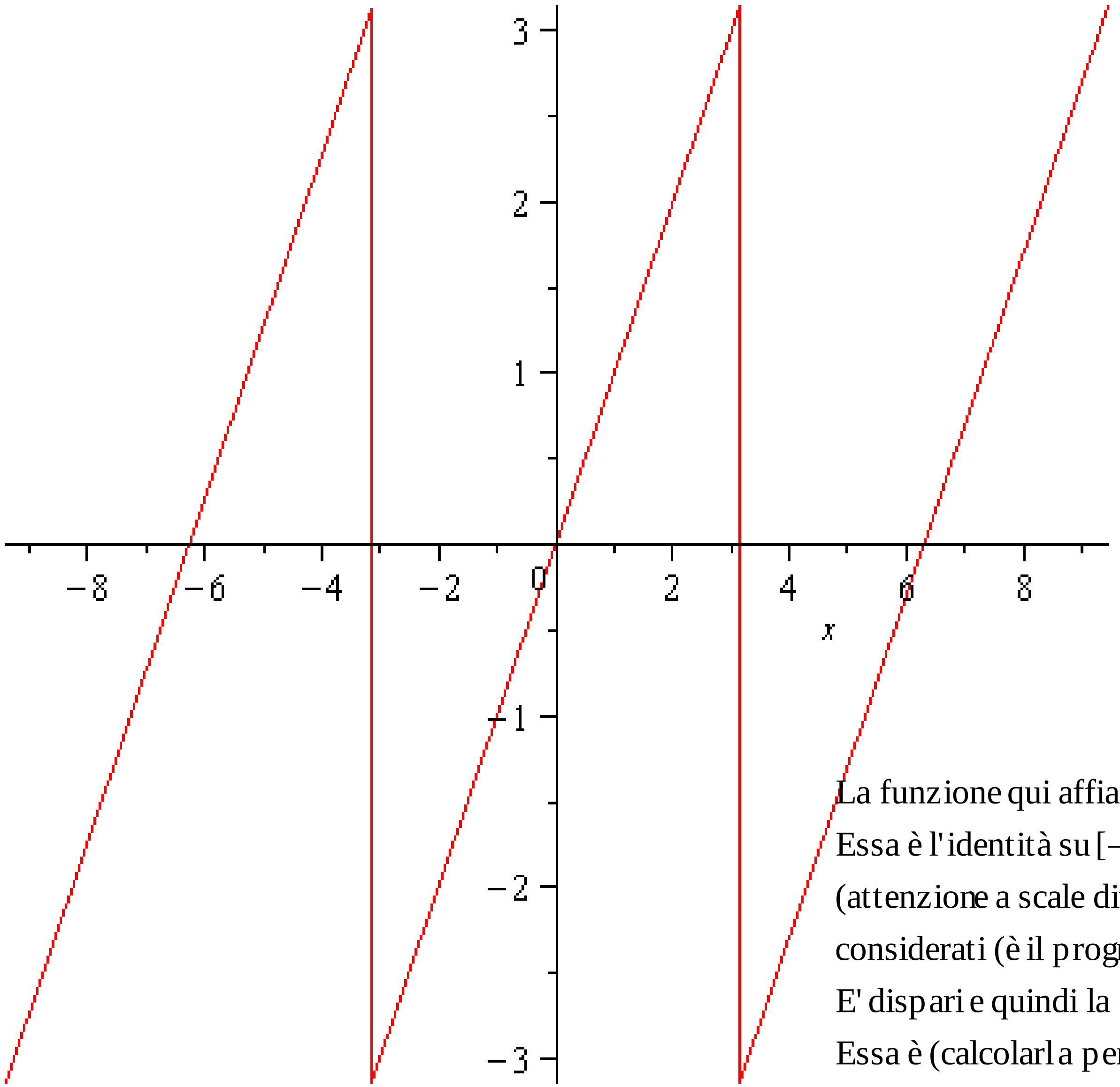
$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R};$$

iii) f has a first-kind discontinuity in x_0, that is

$$\mathbb{R} \ni f^+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f^-(x_0) = \lim_{x \to x^-} f(x) \in \mathbb{R},$$

and the following limits exists in $\mathbb{R}$

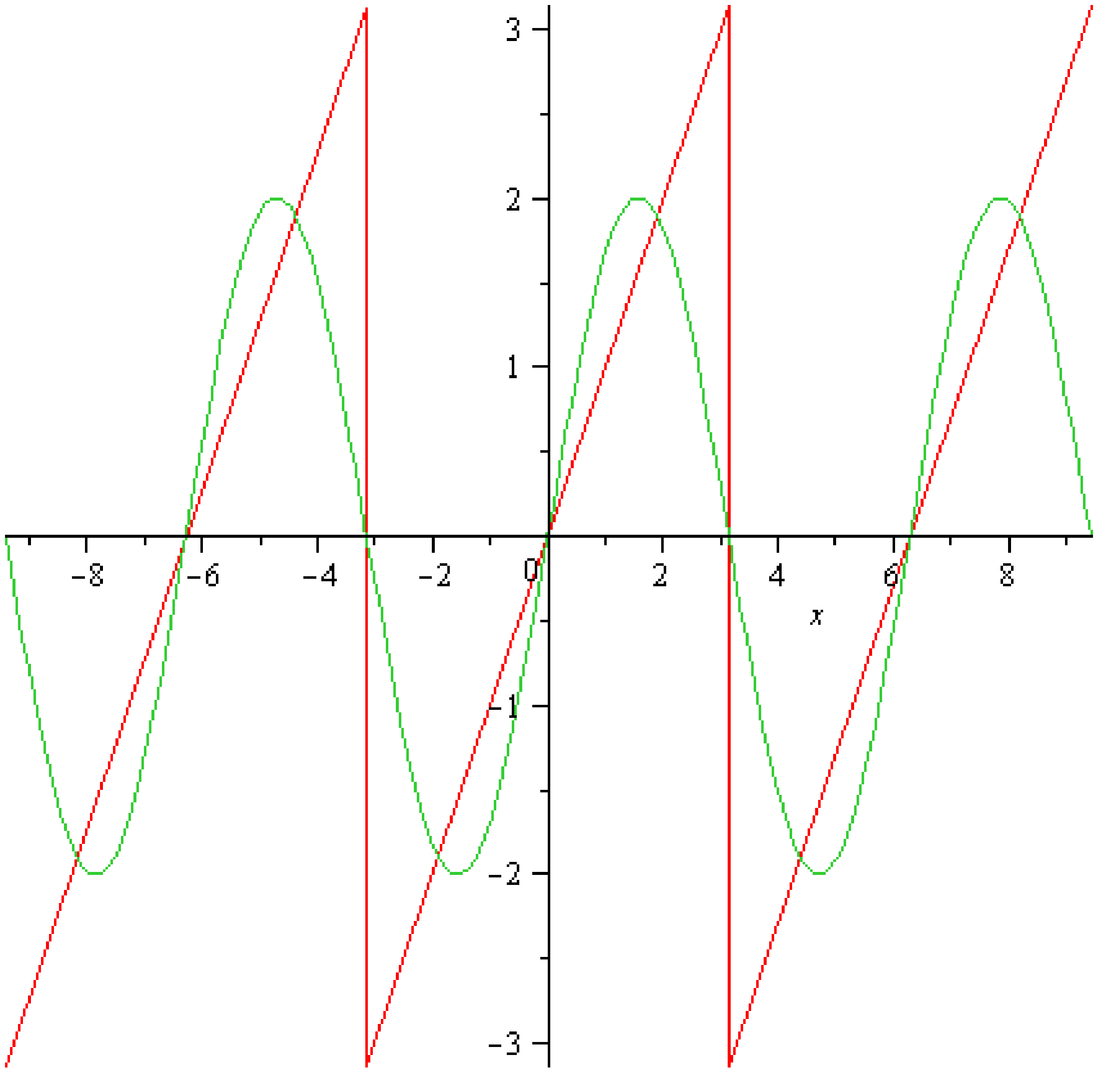
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f^+(x_0)}{h}, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f^-(x_0)}{h}.$$



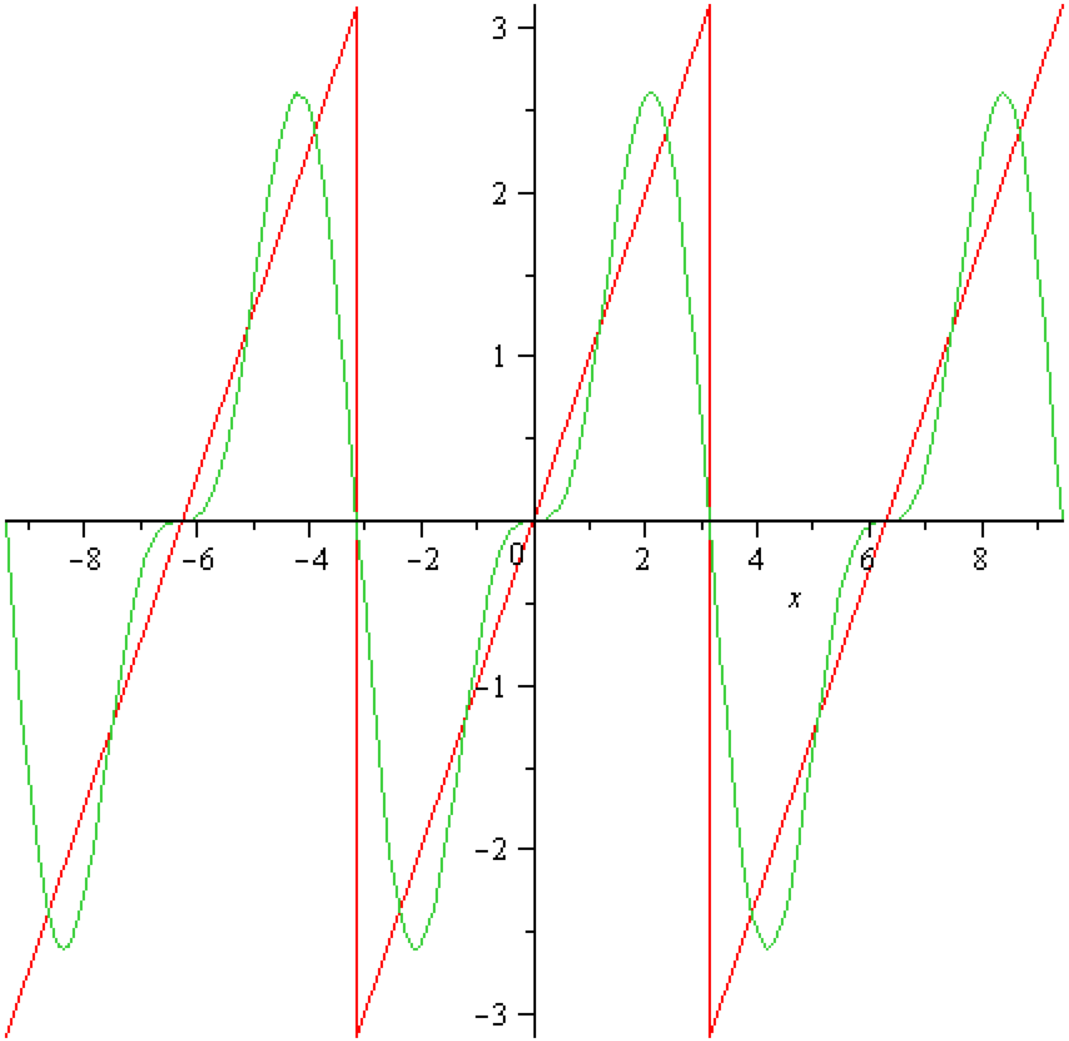
La funzione qui affianco è 2π – periodica e discontinua.
Essa è l'identità su $[-\pi, \pi]$ e poi replicata per periodicità (attenzione a scale diverse sul grafico). I tratti verticali non vanno considerati (è il programma che li disegna).
E' dispari e quindi la sua serie di Fourier conterrà solo seni.
Essa è (calcolarla per esercizio):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

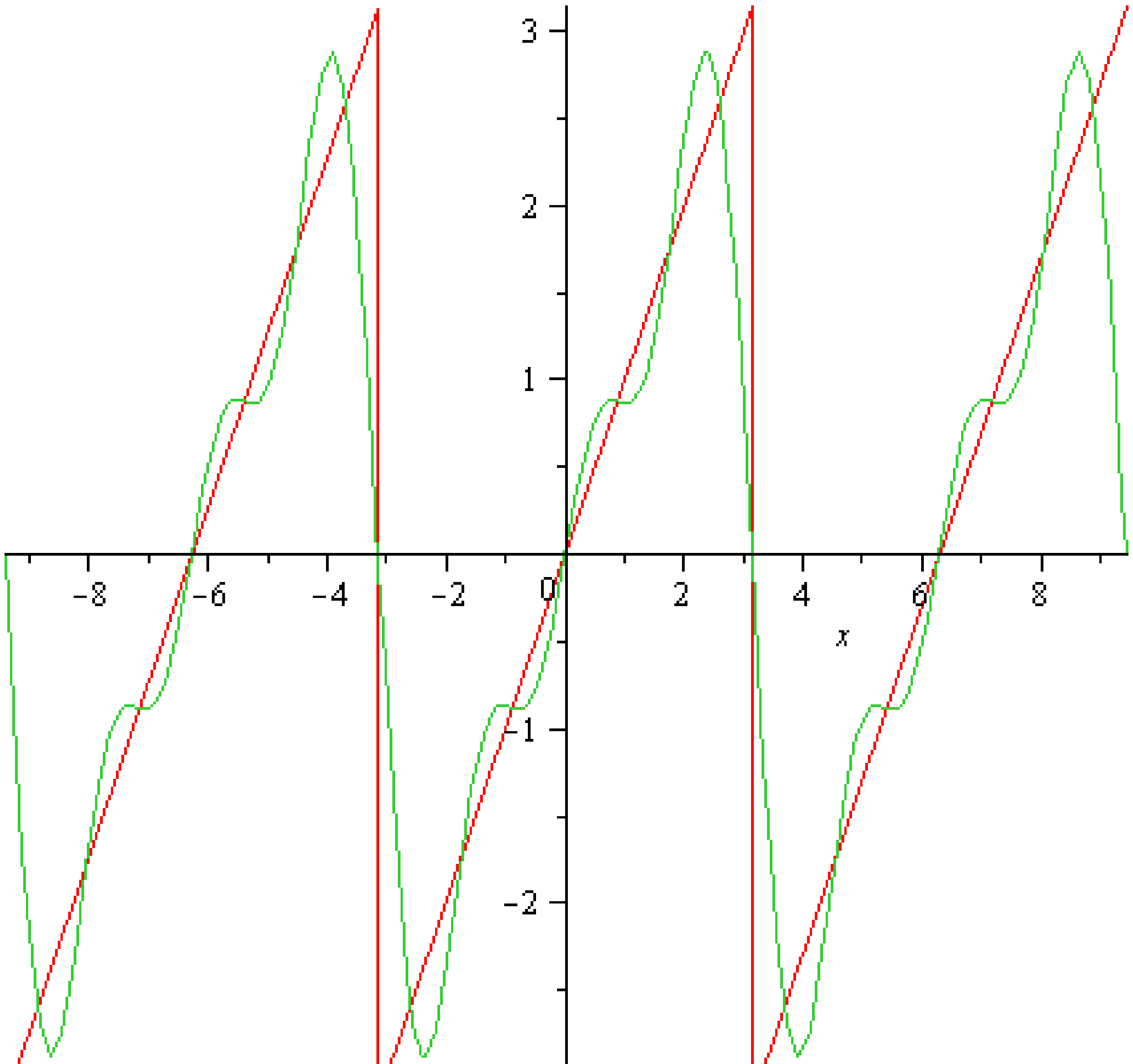
$$\sum_{n=1}^{1} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = 2\sin(x)$$



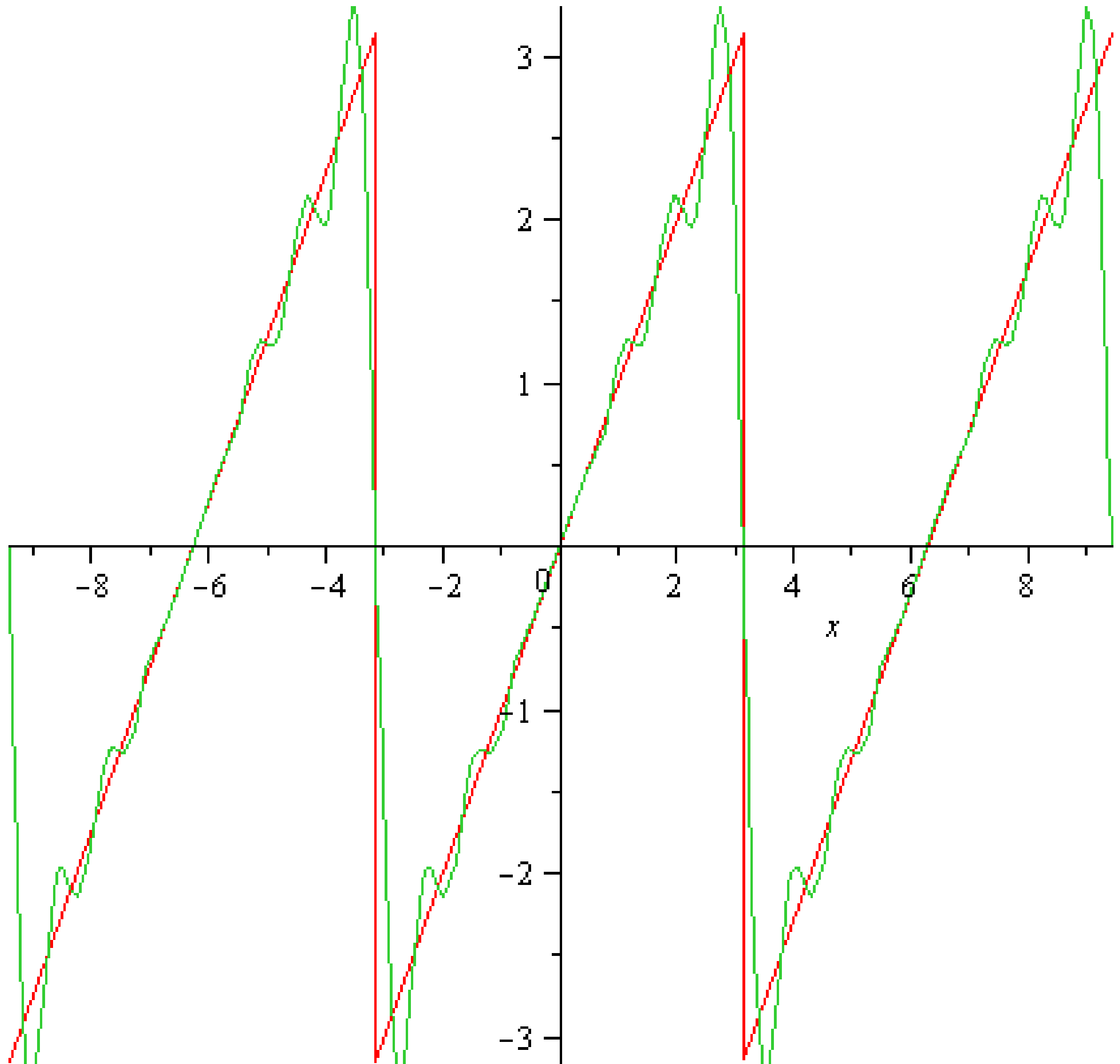
$$\sum_{n=1}^{2} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = 2\sin(x) - \sin(2x)$$



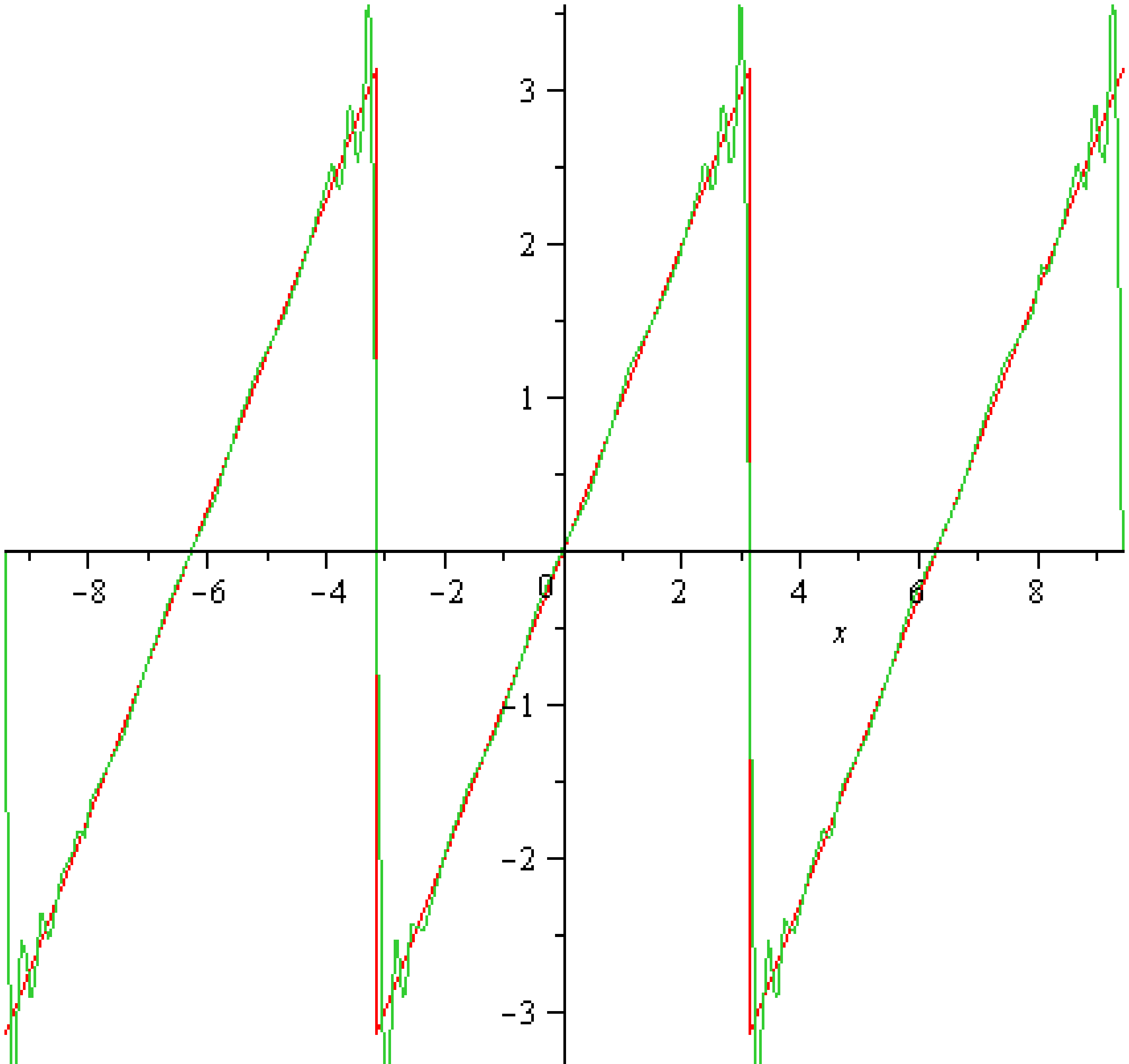
$$\sum_{n=1}^{3}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)=2\sin(x)-\sin(2x)+\frac{2}{3}\sin(3x)$$



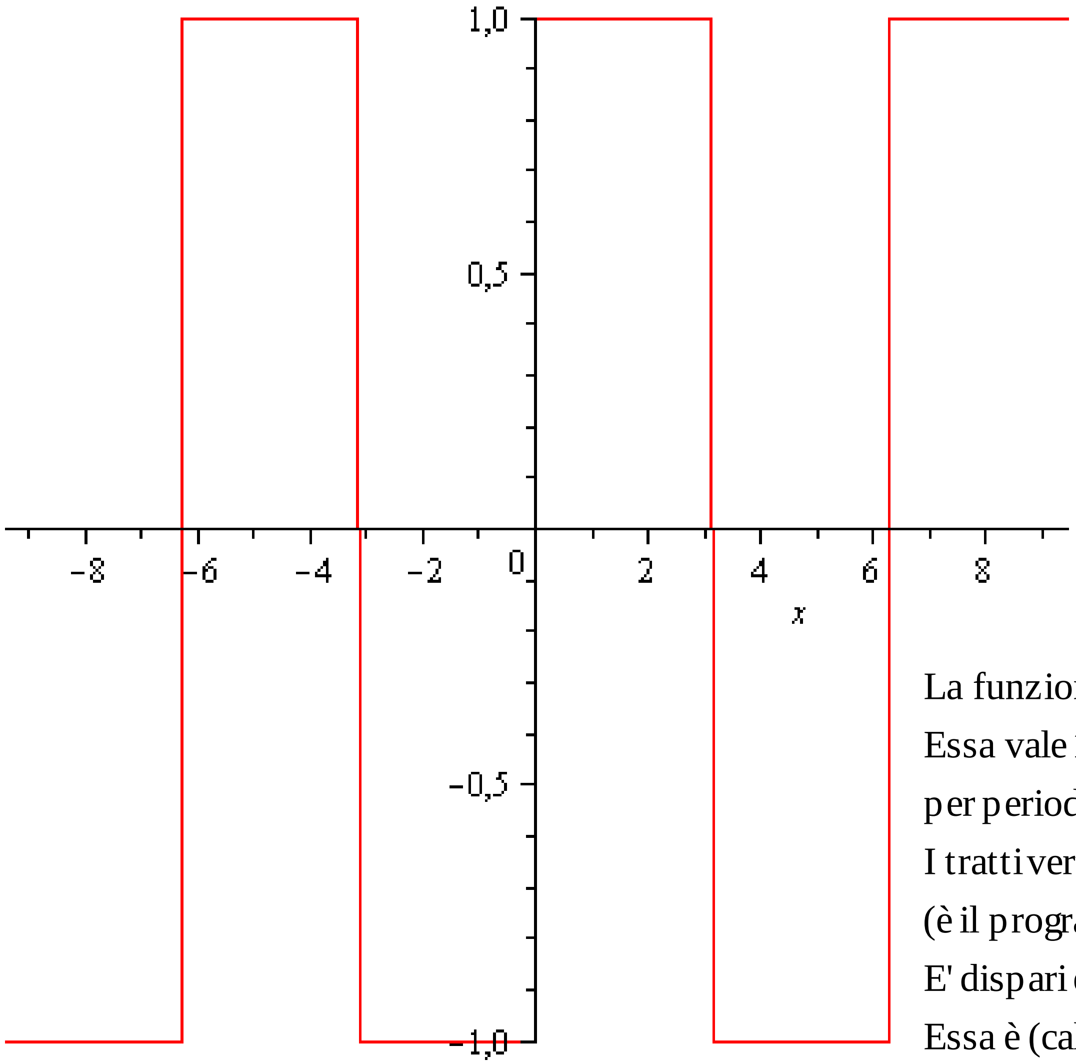
$$\sum_{n=1}^{7} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$



$$\sum^{20} \frac{2(-1)^{n+1}}{} \sin(nx)$$



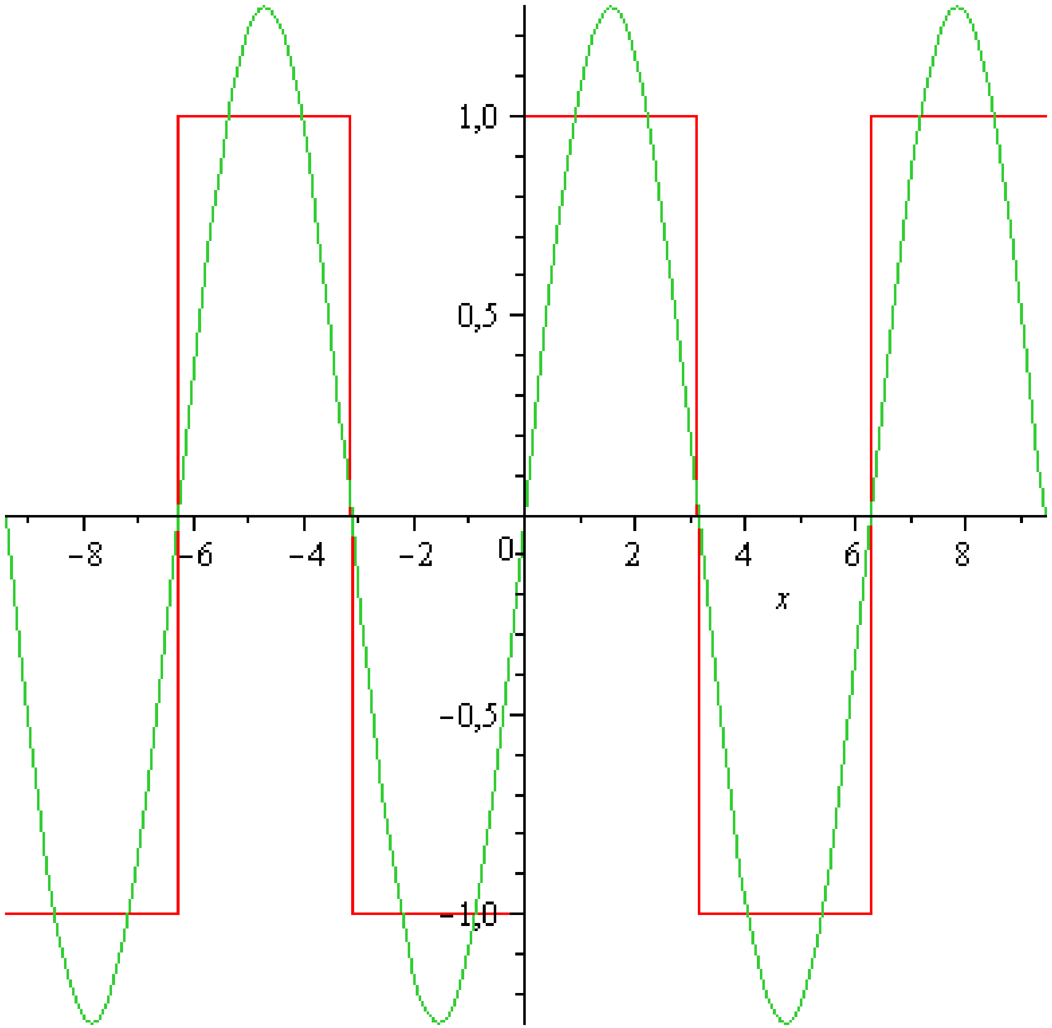
Onda Quadra



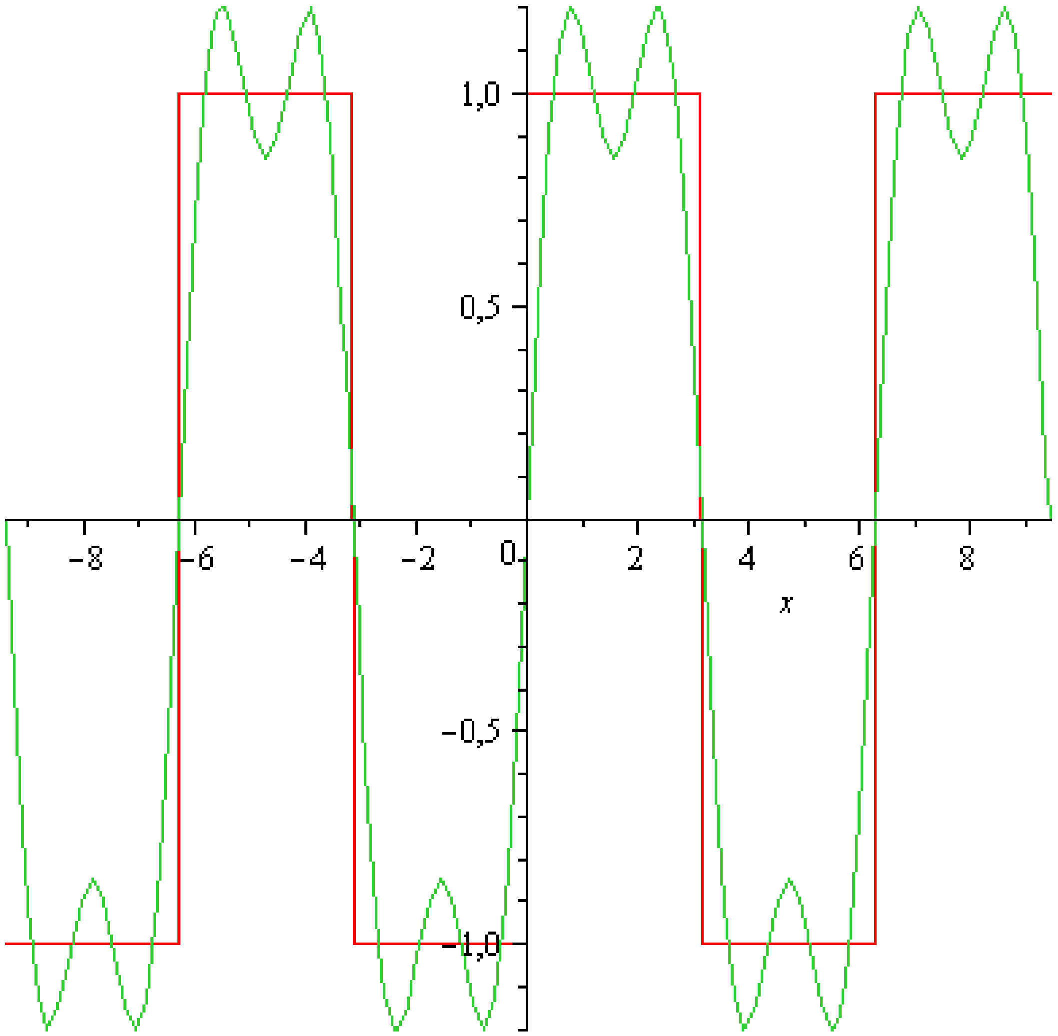
La funzione qui affianco è 2π – periodica e discontinua.
Essa vale 1 su $]0,\pi[$ e -1 su $]-\pi,0[$ e poi replicata
per periodicità (attenzione a scale diverse sul grafico).
I tratti verticali non vanno considerati
(è il programma che li disegna)
E' dispari e quindi la sua serie di Fourier conterrà solo seni.
Essa è (calcolarla per esercizio):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x)$$

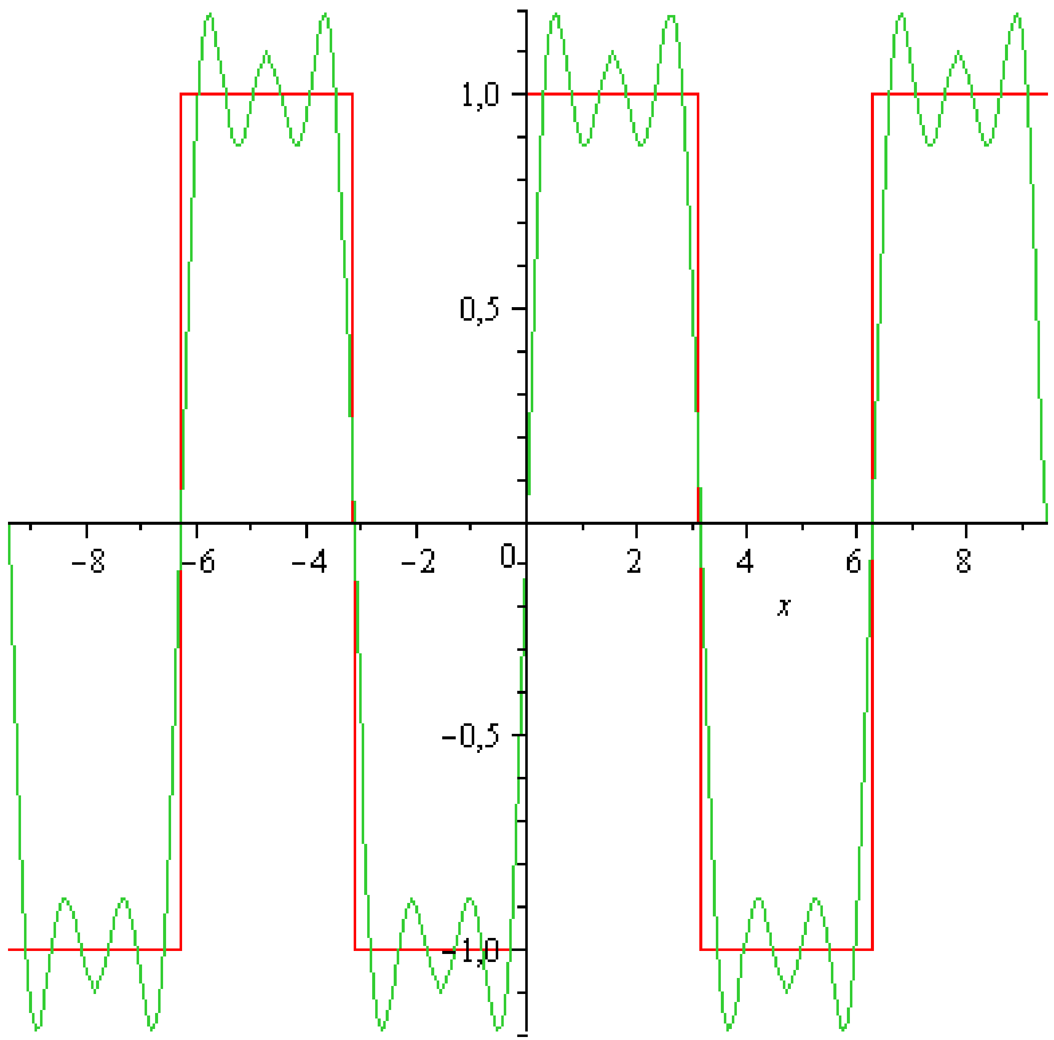
$$\sum_{n=0}^{0} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x) = \frac{4}{\pi}\sin(x)$$



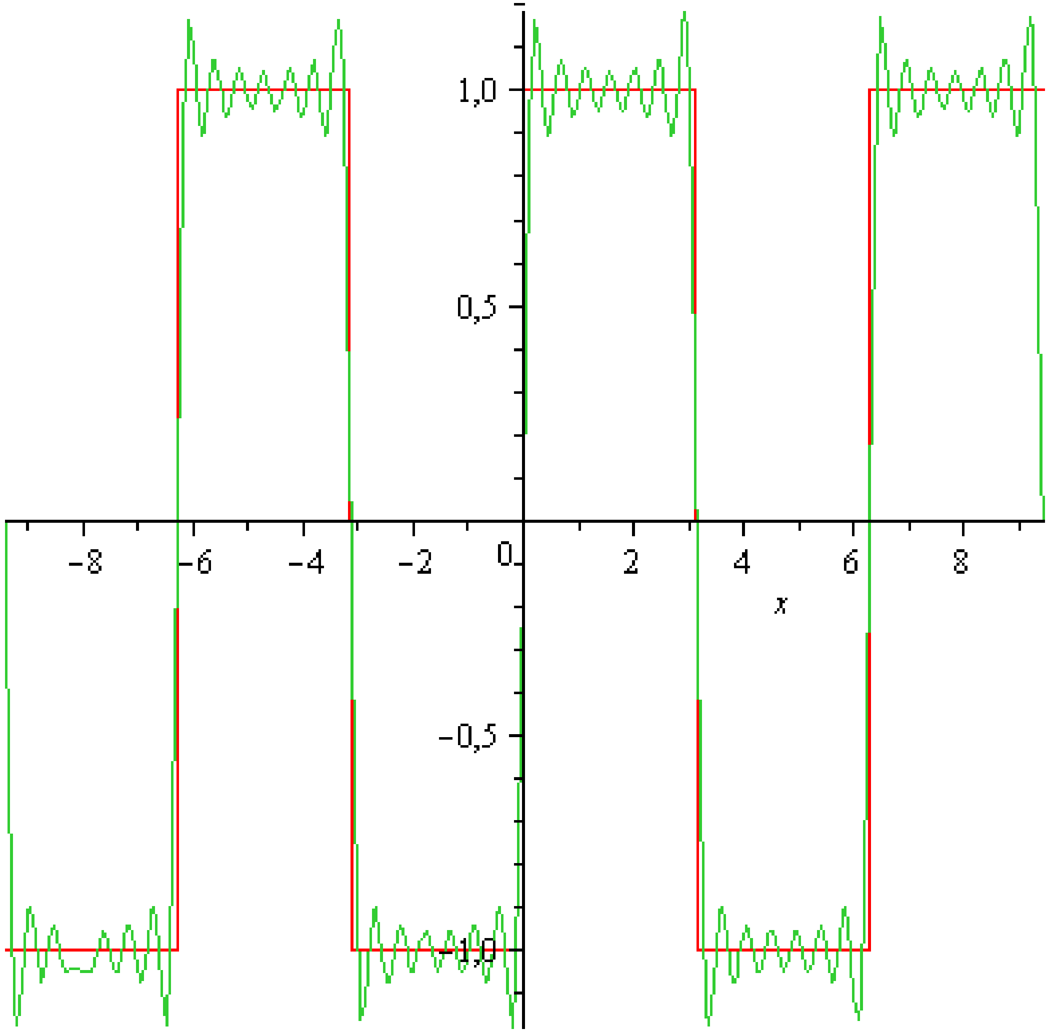
$$\sum_{n=0}^{1}\frac{4}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)x)=\frac{4}{\pi}\sin(x)+\frac{4}{3\pi}\sin 3x$$



$$\sum_{n=0}^{2}\frac{4}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)x)=\frac{4}{\pi}\sin(x)+\frac{4}{3\pi}\sin 3x+\frac{4}{5\pi}\sin(5x)$$



$$\sum_{n=0}^{6} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x)$$



$$\sum_{n=0}^{19} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x)$$