POTENZE DI MATRICI QUADRATE

In alcune applicazioni pratiche, quali lo studio di sistemi dinamici discreti, può essere necessario calcolare le potenze A^k, per $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, di una matrice quadrata $A \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con un esponente k molto alto. Determinare la k-esima potenza di una matrice equivale ad effettuare i $k-1$ prodotti successivi della matrice per sè stessa:

$$A^k = \underbrace{A \cdot ...... \cdot A}_{k \text{ volte}},$$

ma il calcolo, in generale, può risultare poco agevole come mostra il seguente esempio.

Esempio 1 *Calcolare la terza potenza della matrice quadrata*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Procediamo con il calcolo dei prodotti della matrice per sè stessa:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 10 \end{pmatrix},$$

e

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 27 & -26 \end{pmatrix}.$$

Seguendo un tale procedimento il numero di prodotti riga per colonna che andiamo a compiere è pari a $(k-1)n^2$ dove k è la potenza che vogliamo calcolare ed n è l'ordine della matrice. Considerando che ogni prodotto riga

per colonna coinvolge n prodotti ed $n-1$ somme, il numero di operazioni crescerà come $(k-1)n^2(2n-1)$. Nell'esempio precedente infatti abbiamo eseguito ben 8 prodotti riga per colonna ($k=3$, $n=2$), per un totale di 24 operazioni. Non si fa fatica ad immaginare che con il crescere della potenza e della dimensione della matrice il carico di lavoro diventi insostenibile.
L'obiettivo di queste dispense è quello di illustrare un metodo che permetta di risolvere questo problema con un numero di operazioni che cresca in modo ragionevole al crescere della potenza e dell'ordine della matrice. Risolviamo per prima cosa un caso particolarmente semplice ma che tornerà utile in futuro: il caso di matrici diagonali.

Matrici diagonali

Il calcolo delle potenze di una matrice può essere notevolmente semplificato se si considera il sottoinsieme delle matrici diagonali. Sia infatti $D \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice diagonale della forma

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

allora si verifica facilmente che

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

per ogni scelta di $k \in \mathbb{N}$.
In altre parole la potenza k-esima di una matrice diagonale D corrisponde alla matrice diagonale D^k che ha come coefficienti le potenze k-esime degli elementi delle diagonale di D. In questo caso dunque dovremo compiere k prodotti per ognuno degli n elementi non nulli della matrice: in totale $k \cdot n$ operazioni (notevolmente più agevole del caso precedente). Il caso di matrici diagonali risulta, da un lato, molto pratico per la naturalezza dei conti ma dall'altro poco applicabile perché considera una classe molto ristretta di matrici. Il passo successivo sarà quello di applicare i risultati appena visti ad una classe più ampia di matrici: le matrici diagonalizzabili.

Matrici diagonalizzabili

Come vedremo, le matrici diagonalizzabili possiedono una comoda rappresentazione in termini di una matrice invertibile ed una diagonale.

Definizione 1 *Sia* $A \in \boldsymbol{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *una matrice quadrata a coefficienti reali. A è detta diagonalizzabile se esiste una matrice* $B \in \boldsymbol{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *invertibile tale che* $D := B^{-1}AB$ *è diagonale*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Allora

$$A = BDB^{-1}. \tag{1}$$

Grazie alla scrittura (1) possiamo calcolare piuttosto agevolmente le potenze della matrice A:

$$A^2 = AA = (BDB^{-1})(BDB^{-1}) = BD\underbrace{B^{-1}B}_{I}DB^{-1} = BD^2B^{-1}$$

$$A^3 = A^2A = (BD^2B^{-1})(BDB^{-1}) = BD^2\underbrace{B^{-1}B}_{I}DB^{-1} = BD^3B^{-1}$$

dove I è la matrice identità.
Iterando il procedimento otteniamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = BD^kB^{-1} = B\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}B^{-1}. \tag{2}$$

In conclusione, una volta trovata la matrice diagonalizzante B e la sua inversa B^{-1}, il calcolo della potenza k-esima della matrice A si riduce al calcolo della potenza di una matrice diagonale D.

Esempio 2 *Calcolare la potenza di ordine* 10 *della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per prima cosa calcoliamo gli autovalori della matrice A tramite il suo polinomio caratteristico.

$$P_\lambda(A) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 3 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

Dall'uguaglianza $P_\lambda(A) = 0$ ricaviamo che la matrice A ammette tre autovalori reali e distinti: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Ricordiamo che se una matrice $A \in \boldsymbol{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile. Nel nostro caso esiste $B \in \boldsymbol{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ invertibile tale che $D = B^{-1}AB$ con D matrice diagonale avente come coefficienti gli autovalori di A

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice diagonalizzante B ha come colonne gli autovettori corrispondenti agli autovalori della matrice A. L'autovettore o gli autovettori corrispondenti ad un autovalore λ sono base dell'autospazio E_λ associato a λ.

Autospazio E_2

$$E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = 2u\}$$

Il sistema lineare associato risulta

$$\begin{cases} 2x + y - z - 2x = 0 \\ 3x + 2y - 3z - 2y = 0 \\ 3x + y - 2z - 2z = 0 \end{cases}$$

Risolvendolo si ottiene

$$E_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

da cui $v_2 = (1,1,1)$, base dell'autospazio E_2, risulta essere l'autovettore associato all'autovalore $\lambda = 2$.

Autospazio E_1

$$E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = u\}$$

Il sistema lineare associato risulta

$$\begin{cases} 2x + y - z - x = 0 \\ 3x + 2y - 3z - y = 0 \\ 3x + y - 2z - z = 0 \end{cases}$$

Risolvendolo si ottiene

$$E_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

da cui $v_1 = (1, 0, 1)$*, base dell'autospazio* E_1*, risulta essere l'autovettore associato all'autovalore* $\lambda = 1$.

Autospazio E_{-1}

$$E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = -u\}$$

Il sistema lineare associato risulta

$$\begin{cases} 2x + y - z + x = 0 \\ 3x + 2y - 3z + y = 0 \\ 3x + y - 2z + z = 0 \end{cases}$$

Risolvendolo si ottiene

$$E_{-1} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

da cui $v_{-1} = (0, 1, 1)$*, base dell'autospazio* E_{-1}*, risulta essere l'autovettore associato all'autovalore* $\lambda = -1$*. La matrice* B *si ottiene considerando come colonne gli autovettori appena trovati, nello stesso ordine in cui compaiono gli autovalori corrispondenti nella matrice diagonale:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tramite un'eliminazione di Gauss prima in avanti e poi all'indietro otteniamo la sua inversa

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando la formula (2) abbiamo, per un generico valore di $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^k = BD^kB^{-1} \quad &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 2^k-1 & -2^k+1 \\ 2^k+(-1)^{k+1} & 2^k & -2^k+(-1)^k \\ 2^k+(-1)^{k+1} & 2^k-1 & -2^k+1+(-1)^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In particolare per $k = 10$, *ricordando che* $2^{10} = 1024$,

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1024 & 1023 & -1023 \\ 1023 & 1024 & -1023 \\ 1023 & 1023 & -1022 \end{pmatrix}$$

Esercizio

Calcolare la potenza di ordine 8 della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$