COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA 19 GENNAIO 2010

Esercizio 1. Data la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y \log(1 + x^2),$$

i) determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ (N.B. anche se lo studio della matrice Hessiana non bastasse, si può comunque giungere ad una conclusione...);

ii) Dire se f ha massimo e/o minimo assoluti in $\mathbb{R}^2$;

iii) Determinare il massimo e il minimo assoluti (e i punti dove sono assunti) di f sul quadrato (chiuso e pieno) di vertici

$$(1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1).$$

Soluzione. i) I punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{2xy}{1 + x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \log(1 + x^2) = 0, \end{cases}$$

e quindi sono i punti del tipo $(0, y)$ con $y \in \mathbb{R}$ qualunque (è la retta delle ordinate).

Calcolando le derivate seconde, si ottiene la seguente matrice Hessiana

$$H_f(0, y) = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che, qualunque sia $y \in \mathbb{R}$, è semidefinita e quindi non permette di concludere riguardo alla natura del punto stazionario.

Però, in ciascuno dei punti stazionari si ha $f(0, y) = 0$ e notiamo che, essendo $\log(1 + x^2) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, se $y > 0$ allora, intorno a $(0, y)$ la funzione è non negativa e quindi il punto è di minimo locale, viceversa se $y < 0$ allora il punto è di massimo locale. Con medesimi ragionamenti si vede anche che $(0, 0)$ è un punto di sella.

ii) Non esistono massimo e minimo assoluti su $\mathbb{R}^2$. Infatti, ad esempio, si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x, x) = \pm\infty.$$

iii) Il quadrato, chiuso e pieno, è ovviamente chiuso e limitato; f è continua e quindi esistono massimo e minimo di f sul quadrato.

I punti stazionari interni sono i punti $(0, y)$ con $-1 < y < 1$ su cui la funzione si annulla. Studiamo le restrizioni di f sul bordo:

$$\begin{array}{l}\varphi_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(1,y) = y\log(2),\\ \varphi_{-1} : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(-1,y) = y\log(2),\\ \psi_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x,1) = \log(1+x^2),\\ \psi_{-1} : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x,-1) = -\log(1+x^2).\end{array}$$

Si giunge facilmente alla conclusione che il massimo è $\log(2)$ assunto in $(1,1)$ e in $(-1,1)$, mentre il minimo è $-\log(2)$ assunto in $(1,-1)$ e in $(-1,-1)$.

Esercizio 2.
Calcolare il volume del solido in $\mathbb{R}^3$

$$E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big| \; -1 \le x \le 1, -x-1 \le y \le x+1, x^2+y^2 \le 1, xy \ge 0, 0 \le z \le xy\Big\}.$$

Soluzione. L'insieme E è formato dalla porzione di spazio sotto il grafico della funzione $f(x,y) = xy$ e sopra all'insieme D formato dal quarto di cerchio (pieno) di centro l'origine, raggio 1 e situato nel primo quadrante, unito il triangolo di vertici $(-1,1)$, $(0,0)$ e $(0,-1)$. Siano D_1 ed D_2 questi due insiemi rispettivamente e notiamo che la loro intersezione consta di un solo punto (l'origine). Quindi

$$Vol(E) = \int\int_D xydxdy = \int\int_{D_1} xydxdy + \int\int_{D_2} xydxdy.$$

Notiamo che, per definizione di E, $xy \ge 0$ su D. Con un cambiamento di variabili per il primo integrale e integrando con integrazioni successive si ha

$$Vol(E) = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \cos\theta \sin\theta d\theta d\rho + \int_{-1}^0 \int_{-x-1}^0 xydydx = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 3. Marco vorrebbe andare a trovare Luisa, ma non sa decidersi. Allora lancia una moneta: se esce croce va a trovare Luisa. Decide poi di prendere uno dei sei treni a disposizione lanciando un dado a sei facce.

i) Qual è la probabilità che Marco vada a trovare Luisa?

ii) Qual è la probabilità che Marco arrivi con il terzo treno?

iii) Qual è la probabilità che arrivi con il terzo o con il quarto treno?

iv) Luisa è in stazione ad aspettare l'eventuale arrivo di Marco. Qual è la probabilità che dopo il primo treno Marco non sia ancora arrivato?

v) Luisa è in stazione ad aspettare l'eventuale arrivo di Marco. Dopo 5 treni Marco non è ancora arrivato. Qual è ora la probabilità che arrivi con il sesto treno?

vi) Anche Luca vorrebbe andare a trovare Luisa. Ma è più dubbioso. Per decidere lancia un dado a sei facce e va solo se esce il numero 6. Sceglie poi il treno lo stesso giorno e allo stesso modo di Marco. Qual è la probabilità che Luisa se li veda scendere ambedue dal medesimo treno?

Soluzione. i) La probabilità è chiaramente $1/2$.

ii) Se decide di andare, la probabilità di prendere il terzo treno è $1/6$. Quindi la probabilità di prendere il terzo treno è $(1/2) \cdot (1/6) = 1/(12)$.

iii) Essendo eventi incompatibili, la probabilità è $1/(12) + 1/(12) = 1/6$.

iv) È l'evento complementare all'evento A="Marco arriva con il primo treno". La probabilità dell'evento A è $1/(12)$, quindi la probabilità richiesta è $1 - 1/(12) = 11/(12)$.

v) Si tratta di probabilità condizionata. Sappiamo che Marco non è arrivato con i primi 5 treni. Ciò significa che: o Marco non arriva (probabilità $1/2$) o Marco arriva con il sesto treno (probabilità $1/(12)$). Questo è quindi il nuovo spazio degli eventi, chiamiamolo B, la cui probabilità è $1/2 + 1/(12) = 7/(12)$. L'evento C="Marco arriva con il sesto treno" è un sottinsieme di B e quindi la probabilità richiesta è

$$p(C|B) = \frac{p(B \cap C)}{p(B)} = \frac{p(C)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}.$$

vi) La probabilità che Luca vada è $1/6$. L'evento richiesto è:

$$(Marco\ va) \cap (Luca\ va) \cap (prendono\ lo\ stesso\ treno)$$

ed è formata dall'intersezione di eventi indipendenti. Sia Marco che Luca possono prendere 6 treni (Luca, se al primo lancio esce 6, poi lancia nuovamente per decidere il treno). Quindi le coppie di treni (il primo preso da Marco e il secondo preso da Luca) sono 36 e solo 6 sono formate dal medesimo treno per Marco e per Luca. Quindi la probabilità richiesta è

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{36}=\frac{1}{72}.$$

Esercizio 4. Si considerino le seguenti coppie di dati (x, y)

$$(1,10),(2,12),(3,17),(4,5),(5,15),$$
$$(6,20),(7,30),(8,35),(9,35),(10,40).$$

i) Si supponga che y_i sia il numero di elettori del partito x_i, rilevato tramite un sondaggio su un campione di popolazione di 219 individui. Si riportino i dati su di un istogramma.

ii) Si supponga che y_i sia il numero di successi di un dato esperimento in corrispondenza del valore del parametro x all'interno dell'intervallo $[x_i - 1/2, x_i + 1/2[$. Si riportino i dati su di un istogramma in relazioni alle classi di x: $[1/2, 11/2[$, $[11/2, 15/2[$, $[15/2, 17/2[$, $[17/2, 21/2[$.

iii) Si supponga che y_i sia il numero di volte che un dato esperimento ha dato come risultato x_i. Sul totale degli esperimenti effettuati, calcolare la media, la varianza, la deviazione standard, la mediana, il primo e il terzo quartile del risultato x dell'esperimento. Si disegni un grafico *Box and Whiskers*.

iv) Sempre nell'ipotesi che y_i sia il numero di volte che un dato esperimento ha dato come risultato x_i, si determini un intervallo di fiducia al 95% per la media non nota μ del valore x dell'eperimento (si supponga il numero degli esperimenti sufficientemente grande).

Soluzione (traccia). iii) Abbiamo fatto 219 esperimenti e 10 volte abbiamo ottenuto 1, 12 volte abbiamo ottenuto 2, 17 volte abbiamo ottenuto 3 ecc... Quindi abbiamo 219 dati x^k, $k = 1, \ldots, 219$ di cui i primi 10 sono uguali a 1, i secondi 12 sono uguali a 2 ecc....

La media è pertanto

$$\overline{x} = \frac{10 + 2\cdot 12 + 3\cdot 17 + 4\cdot 5 + 5\cdot 15 + 6\cdot 20 + 7\cdot 30 + 8\cdot 35 + 9\cdot 35 + 10\cdot 40}{219} = \frac{1}{219}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 6.87$$

Allo stesso modo la varianza è

$$\tfrac{1}{219}\textstyle\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 y_i = 7.25,$$

da cui la deviazione standard è $\sigma = 2.69$. La mediana è $x^{110} = 8$, il primo quartile è $x^{55} = 5$ e il terzo quartile è $x^{165} = 9$.

iv)

$$[6.5, 7.24].$$