COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - 15 GIUGNO 2010

Esercizio 1. Data la funzione

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^7}{7} + z,$$

determinare massimo e minimo assoluti di f sull'insieme chiuso e limitato

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^4 + y^4 + z^4 = 1\right\},$$

e i punti in cui essi sono raggiunti.

Soluzione. La funzione f è continua e quindi il massimo e il minimo su S (che è chiuso e limitato) esistono. Definiamo

$$g(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1,$$

da cui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = 0\}$. Sia g che f sono di classe C^1 e quindi applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Notiamo subito che S non ha punti singolari, infatti

$$\nabla g(x, y, z) = (4x^3, 4y^3, 4z^3) = (0, 0, 0) \implies (x, y, z) = (0, 0, 0) \notin S.$$

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda x^3 \\ y^6 = 4\lambda y^3 \\ 1 = 4\lambda z^3 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 1. \end{cases}$$

Dalla prima e dalla terza equazione abbiamo immediatamente $\lambda, x, z \neq 0$, e quindi

$$x = y = \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} = c \neq 0.$$

Se $y = 0$, allora, dalla quarta equazione abbiamo

$$2c^4 = 1 \implies c = \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

da cui otteniamo i due punti (ricordare che $x = z$)

$$P_1 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, 0, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right), \; P_2 = \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, 0, -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right).$$

Se invece $y \neq 0$, allora, dalla seconda equazione si ha

$$y^3 = 4\lambda = \frac{1}{x^3} \implies y = \frac{1}{x} = \frac{1}{c}.$$

Dalla quarta equazione si ottiene

$$c^4 + \frac{1}{c^4} + c^4 = 1 \implies 2c^8 - c^4 + 1 = 0,$$

e si vede subito, ponendo $w = c^4$, che non ci sono soluzioni reali (discriminante negativo).

Quindi, gli unici punti trovati sono P_1, P_2, da cui, immediatamente,

$$\max_S f = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{raggiunto in } P_1,$$
$$\min_S f = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{raggiunto in } P_2.$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A (x-y)dxdy,$$

dove $A \subset \mathbb{R}^2$ è dato da $A = A_1 \cup A_2$ dove

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\right\},$$
$$A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

(N.B. A è l'unione di due insiemi che però hanno intersezione non vuota; quindi disegnare bene l'insieme A per poi decomporlo in pezzi semplici.)

Soluzione. L'insieme A si trova tutto nel primo quadrante ed è costituito dai seguenti pezzi semplici intersecantesi solo sul bordo: la porzione di cerchio (pieno) di centro l'origine e raggio 1 che si trova sopra al segmento $[0, \sqrt{2}/2]$, unito al rettangolo di base $[\sqrt{2}/2, 1]$ e altezza $[0, \sqrt{2}/2]$. Possiamo ulteriormente scomporre nei seguenti tre pezzi semplici intersecantesi solo sul bordo:

1) settore circolare di raggio 1 con angolo $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$;
2) triangolo di vertici $(0, 0)$, $(\sqrt{2}/2, 0)$, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$;
3) rettangolo di vertici $(\sqrt{2}/2, 0)$, $(1, 0)$, $(1, \sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Pertanto, effettuando un cambiamento di variabili nel settore circolare,

$$\int\int_A (x-y)dxdy = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\rho\cos\theta - \rho\sin\theta)\rho d\theta d\rho +$$
$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^x (x-y)dydx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x-y)dydx = \frac{2-\sqrt{2}}{24}.$$

Esercizio 3. Si consideri un sacchetto contenente 10 palline numerate da 1 a 10.

i) Si effettuano due estrazioni senza reimbussolamento. Qual è la probabilità di estrarre due palline con numeri successivi (indipendentemente dall'ordine)?

ii) Si effettuano due estrazioni senza reimbussolamento. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta abbia il numero immediatamente successivo a quello della prima estratta?

iii) Si effettuano due estrazioni senza reimbussolamento. Qual è la probabilità che la seconda estratta sia dispari?

iv) Si effettuano cinque estrazioni senza reimbussolamento. Qual è la probabilità di estrarre cinque palline pari?

v) Si effettuano due estrazioni senza reimbussolamento. Qual è la probabilità di estrarne almeno una pari? E la probabilità di estrarne esattamente una pari e una dispari (indipendentemente dall'ordine)?

(N.B. Ciascun punto può essere svolto indipendentemente dagli altri.)

Soluzione. i) Sia $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, il numero uscito alla prima estrazione. Se $1 < n < 10$ allora alla seconda estrazione abbiamo due possibilità (su nove): $n-1$ e $n+1$. Se invece $n = 1$ o $n = 10$, allora alla seconda estrazione abbiamo una sola possibilità (su nove): $n = 2$ o $n = 9$ rispettivamente. La probabilità di avere $n = 1$ alla prima estrazione è $1/10$

e analogamente per $n = 10$; la probabilità di avere $1 < n < 10$ alla prima estrazione è $8/10$. Quindi la probabilità richiesta è

$$p = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{5}.$$

ii) Con ragionamenti (e notazioni) analoghi a quelli del punto i), se $1 \leq n \leq 9$, allora alla seconda estrazione abbiamo una sola possibilità: $n+1$, se invece $n = 10$, allora alla seconda estrazione non abbiamo alcuna possibilità. Quindi

$$p = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}.$$

iii) Se n (il primo estratto) è pari, allora alla seconda estrazione ho 5 possibilità su 9, Se invece è dispari, allora ho 4 possibilità su 9. Quindi

$$p = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{2}.$$

iv) La probabilità di estrarre pari alla prima estrazione è ovviamente $1/2 = 5/10$. Supponendo di aver estratto pari alla prima (altrimenti ci fermiamo subito: abbiamo perso), la probabilità di estrarre pari alla seconda è $4/9$. Supponendo di aver estratto due numeri pari, la probabilità di estrarre pari alla terza è $3/8$ e così via. Quindi

$$p = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{252}.$$

v) Per averne almeno una pari, devo avere pari alla prima o, alla peggio, pari alla seconda avendo avuto dispari alla prima. Quindi la prima probabilità richiesta è

$$p = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{7}{9}.$$

Per avere prima pari e poi dispari la probabilità è $5/10 \cdot 5/9$ da cui, essendo prima dispari e poi pari il caso "simmetrico", la probabilità richiesta è

$$p = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{9}.$$

Esercizio 4. I risultati di 11 esperimenti di laboratorio hanno dato, nell'opportuna unità di misura, una media pari a 0.11.

i) Sapendo che i primi 10 risultati sono: 0.12, 0.13, 0.01, 0.10, 0.20, 0.02, 0.06, 0.03, 0.19, 0.18, determinare il valore dell'undicesimo esperimento.

ii) Considerando anche l'undicesimo dato trovato al punto i), calcolare mediana e deviazione standard e disegnare un grafico boxplot.

iii) Considerando anche l'undicesimo dato trovato al punto i), disegnare un istogramma continuo delle classi di numerosità: $[0, 0.03]$, $]0.03, 0.09]$, $]0.09, 0.13]$, $]0.13, 0.18]$, $]0.18, 0.20]$.

iv) Considerando anche l'undicesimo dato trovato al punto i), calcolare la deviazione standard campionaria e, assumendo il numero $n = 11$ di esperimenti sufficientemente grande, determinare un intervallo di fiducia al 95% per la media di tutta la popolazione.

Soluzione (parziale). i) Detta x' la somma dei primi 10 dati come elencati nel testo, e detto x_{11} l'undicesimo dato mancante, si ha, evidentemente

$$\frac{x' + x_{11}}{11} = 0.11 \implies x_{11} = 0.17.$$

ii) Basta applicare le formule.

iii) Nella classe $[0, 0.03]$ (di lunghezza 0.03) cadono tre valori, in $]0.03, 0.09]$ (di lunghezza 0.06) cade un valore, in $]0.09, 0.13]$ (di lunghezza 0.04) cadono tre valori, in $]0.13, 0.18]$ (di lunghezza 0.05) cadono due valori, in $]0.18, 0.20]$ (di lunghezza 0.02) cadono due valori. Bisogna disegnare l'istogramma con i rettangoli contigui e tenere conto delle aree.

iv) Basta applicare le formule.