Brevi Cenni alla Teoria Matematica del Controllo e del Controllo Ottimo.

Fabio Bagagiolo

October 20, 2003

[Liberamente tratto da J. Macki & A. Strauss: *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer Verlag, New York, 1995 (seconda edizione)]

Indice.

1 Introduzione.

In queste note si vogliono introdurre alcuni temi classici della teoria matematica del controllo per sistemi di equazioni differenziali ordinarie. In particolare saremo interessati solamente ai sistemi autonomi. Non ci saranno esempi "concreti" di problemi di controllo, né tantomeno controesempi, per i quali si rimanda al testo citato. I requisiti principali sono: teoria dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie lineari e non lineari, funzioni misurabili di variabile reale, soluzioni assolutamente continue per equazioni differenziali ordinarie.

1.1 Formulazione Matematica.

Consideriamo il sistema controllato autonomo

$$\begin{cases} y' = f(y(t), \alpha(t)) & t > 0, \\ y(0) = x, \end{cases} \tag{1.1}$$

dove $f : I\!\!R^n \times A \to I\!\!R^n$, $\alpha : [0, +\infty[\to A$, $A \subseteq I\!\!R^m$ e $x \in I\!\!R^n$, con $n, m \in I\!\!N \setminus \{0\}$. In particolare, assumiamo le seguenti ipotesi

1) la funzione f è continua, e inoltre è Lipschitziana in $x \in I\!\!R^n$ uniformemente rispetto a $a \in A$, quindi in particolare

$$\text{esiste } L > 0 \text{ tale che } |f(x_1, a) - f(x_2, a)| \le L|x_1 - x_2| \ \forall x_1, x_2 \in I\!\!R^n, \ a \in A, \tag{1.2}$$

2) A è compatto e α è misurabile; indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme delle funzioni $\alpha : [0, +\infty[\to A$ misurabili.

Le ipotesi fatte garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema (1.1) qualunque siano $x \in I\!\!R^n$ e $\alpha \in \mathcal{A}$. Inoltre è anche garantita l'esistenza della soluzione per tutti i tempi $t \ge 0$. Tale soluzione è solamente continua (a causa della sola misurabilità di α e quindi del secondo membro $f(\cdot, \alpha(\cdot))$) ed è caratterizzata come l'unica funzione continua $y : [0, +\infty[\to I\!\!R^n$ tale che

$$y(t) = x + \int_0^t f(y(s), \alpha(s)) ds \ \ \forall t \ge 0. \tag{1.3}$$

Chiameremo controlli (o controlli misurabili) le funzioni $\alpha \in \mathcal{A}$, chiameremo traiettorie le soluzioni $y(\cdot)$ di (1.1), controlli costanti gli elementi $a \in A$, variabili di stato gli elementi $x \in I\!\!R^n$, e dinamica la funzione f. In particolare se $y(\cdot)$ è la traiettoria con stato iniziale $x \in I\!\!R^n$ e controllo $\alpha \in \mathcal{A}$, allora useremo la notazione $y_x(\cdot; \alpha)$.

È evidente che ad ogni scelta del controllo $\alpha \in \mathcal{A}$ corrisponde (a priori) una differente traiettoria a partire dal medesimo stato iniziale $x \in I\!\!R^n$. Il sistema controllato (1.1) rappresenta un processo di evoluzione di un "sistema" (fisico, biologico, economico ecc...), nel quale un agente esterno (controllore) interferisce allo scopo di indurre il sistema ad avere un'evoluzione che, per un qualche motivo, è preferibile alle altre possibili. Tale interferenza viene "matematicamente" espletata proprio nella scelta del controllo α. A partire da uno stato iniziale x, ad ogni controllo α corrisponde una traiettoria e il controllore desidera poter scegliere α in modo tale che la traiettoria corrispondente sia quella desiderata (o una di quelle desiderata).

Possiamo dividere i problemi di controllo in problemi di controllabilità e problemi di controllo ottimo.

Controllabilità. Sia $\mathcal{T}$ un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$. Lo scopo è quello di far sì che la traiettoria uscente da un fissato stato iniziale x raggiunga il bersaglio $\mathcal{T}$ in un tempo finito, cioè si vuole che esistano $\overline{\alpha} \in \mathcal{A}$ e $\overline{t} \geq 0$ tali che

$$y_x(\overline{t};\overline{\alpha}) \in \mathcal{T}.$$

Un eventuale controllo $\overline{\alpha}$ che "conduce" x sul bersaglio verrà chiamato un controllo di successo (per x) e lo stato x (per il quale esiste un controllo di successo) verrà detto controllabile. Definiamo l'insieme controllabile $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| x \text{ è controllabile} \right\}.$$

È quindi interessante poter descrivere $\mathcal{C}$: ad esempio poter dire se $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ (cioè se ogni stato iniziale x può essere condotto sul bersaglio); oppure poter dire almeno se $\mathcal{C}$ forma un intorno del bersaglio (questo implica che, una volta giunti sul bersaglio, nell'eventualità che piccole perturbazioni (sempre presenti nel mondo reale) facciano uscire di poco lo stato dal bersaglio, sia comunque possibile ricondurlo sul bersaglio).

Controllo ottimo. Fissato $x \in \mathcal{C}$, può esistere più di un controllo di successo. Può quindi essere interessante studiare quali tra i controlli di successo sono ulteriormente preferibili agli altri. Un possibile criterio per tale selezione è preferire quei controlli che conducono x sul bersaglio minimizzando un qualche funzionale costo che può rappresentare (a seconda del modello reale che si sta descrivendo e degli obiettivi prefissati) ad esempio il tempo di raggiungimento, il dispendio energetico, il consumo di carburante, il denaro pagato per l'operazione finanziaria ecc... In ogni caso considereremo funzionali costo della forma

$$J(x,\alpha) = \int_0^{t_x(\alpha)} \ell(y_x(s;\alpha),\alpha(s))ds,$$

in cui $t_x(\alpha)$ è il tempo di raggiungimento del bersaglio per la traiettoria $y_x(\cdot;\alpha)$:

$$t_x(\alpha) := \inf \left\{ t \geq 0 \middle| y_x(t;\alpha) \in \mathcal{T} \right\}, \tag{1.4}$$

$\ell : I\!R^n \times A \to I\!R$ è il costo corrente. Se $\overline{\alpha} \in \mathcal{A}$ è un controllo di successo per $x \in \mathcal{C}$ che minimizza il funzionale costo J al variare tra tutti i controlli di successo per x, cioè

$$J(x, \overline{\alpha}) = \min \left\{ J(x, \alpha) \middle| \alpha \text{ è di successo per } x \right\},$$

allora $\overline{\alpha}$ verrà detto un controllo ottimo per x.

Per chiudere questo paragrafo diamo alcuni risultati sulle traiettorie di (1.1) che saranno più volte utili in seguito (le ipotesi sono quelle già fatte).

Proposizione 1.1 *Sia $y_x(\cdot; \alpha)$ la traiettoria di (1.1) con dato iniziale x e controllo α. Sia poi $t^* \geq 0$ fissato e definiamo il controllo misurabile $\alpha^* : t \mapsto \alpha(t + t^*)$. Allora la funzione*

$$y^* : t \mapsto y_x(t + t^*; \alpha), \quad t \geq 0$$

è la traiettoria di (1.1) con dato iniziale $x^* := y_x(t^*; \alpha)$ e controllo α^*, cioè

$$y^*(t) = y_{y_x(t^*;\alpha)}(t; \alpha^*) \quad \forall\ t \geq 0.$$

Dimostrazione. Per definizione (e unicità) di soluzione, dobbiamo provare che

$$y^*(t) = y_x(t^*; \alpha) + \int_0^t f(y^*(s), \alpha^*(s)) ds \quad \forall\ t \geq 0. \tag{1.5}$$

Infatti, partendo dalla definizione di y^*, usando la definizione di soluzione, usando note proprietà dell'integrale e operando opportuni cambiamenti di variabile, si ha

$$\begin{aligned}
& y^*(t) = y_x(t + t^*; \alpha) = x + \int_0^{t+t^*} f(y_x(s; \alpha, \alpha(s)) ds \\
& = x + \int_0^{t^*} f(y_x(s; \alpha), \alpha(s)) ds + \int_{t^*}^{t+t^*} f(y_x(s; \alpha), \alpha(s)) ds \\
& = y_x(t^*; \alpha) + \int_0^t f(y_x(s + t^*; \alpha), \alpha(s + t^*)) ds \\
& = y_x(t^*; \alpha) + \int_0^t f(y^*(s), \alpha^*(s)) ds,
\end{aligned}$$

da cui (1.5). $\square$

Proposizione 1.2 *Siano $x \in I\!R^n$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ e $\overline{t} \geq 0$. Definiamo la funzione*

$$\overline{y}(t) = \begin{cases} y_x(t;\alpha_1) & se\ 0 \leq t \leq \overline{t}, \\ y_{y_x(\overline{t};\alpha_1)}(t-\overline{t};\alpha_2(t-\overline{t})) & se\ t > \overline{t}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Allora, $\overline{y}(\cdot)$ è la traiettoria uscente da x con controllo misurabile

$$\overline{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & se\ 0 \leq t \leq \overline{t}, \\ \alpha_2(t-\overline{t}) & se\ t > \overline{t}, \end{cases} \tag{1.7}$$

cioè $\overline{y}(t) = y_x(t;\overline{\alpha})$ per ogni $t \geq 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione praticamente è "duale" a quella della Proposizione 1.1. □

Proposizione 1.3 *i) Siano $x, z \in I\!R^n$ e $\alpha \in \mathcal{A}$. Allora si ha*

$$|y_x(t;\alpha) - y_z(t;\alpha)| \leq e^{Lt}|x - z| \quad \forall\ t \geq 0. \tag{1.8}$$

ii) Siano $x \in I\!R^n$, $T \geq 0$ e $\alpha \in \mathcal{A}$. Allora esiste $M^{x,T} > 0$ (dipendente da x e da T) tale che

$$|y_x(t;\alpha) - x| \leq M^{x,T} t \quad \forall\ t \in [0, T]. \tag{1.9}$$

Dimostrazione. Il punto i) discende dalla definizione di soluzione, dalla lipschitzianità di f e dal Lemma di Gronwall. Il punto ii) discende dalla definizione di soluzione, dalla lipschitzianità di f, dalla limitezza locale di f (in virtù della continuità), dalla compattezza di A e dal lemma di Gronwall. □

Osservazione 1.4 *La Proposizione 1.1 dice che, se pensiamo le traiettorie come cammini in $I\!R^n$, allora presa la traiettoria uscente da x corrispondente ad un fissato controllo α e fissato un qualunque punto x^* su questo cammino, il restante cammino è la traiettoria di (1.1) corrispondente al dato iniziale x^* e al controllo α opportunamente traslato.*

La Proposizione 1.2 dice che "incollando" due traiettorie come in (1.6), si ottiene una traiettoria con controllo "incollato" come in (1.7). In altre parole se seguo una traiettoria uscente da x con controllo α_1 fino al tempo $\overline{t}$ e poi seguo la traiettoria con controllo α_2 uscente dal punto in cui sono arrivato all'istante $\overline{t}$, ottengo la traiettoria uscente da x con controllo ottenuto "incollando opportunamente" i due controlli.

2 Controllabilità.

Consideriamo il sistema controllato (1.1), prendiamo come bersaglio l'origine di $I\!R^n$

$$\mathcal{T} = \{0\} \subset I\!R^n.$$

Come già osservato, essendo il nostro modello una descrizione di situazioni reali, perturbazioni dovute a fattori esterni o a non perfette misurazioni possono far uscire lo stato dal bersaglio. Se però proviamo che l'insieme controllabile $\mathcal{C}$ contiene nel suo interno il bersaglio, allora siamo sicuri che se le perturbazioni sono piccole (e quindi lo stato esce poco dal bersaglio) siamo in grado di riportare lo stato sul bersaglio. Diamo quindi un primo risultato che descrive alcune proprietà dell'insieme controllabile.

Teorema 2.1 *Valgano le ipotesi già fatte per il sistema. Allora l'insieme controllabile è connesso per archi. Inoltre esso è aperto se e soltanto se* $0 \in \mathrm{Int}\mathcal{C}$.

Dimostrazione. Proviamo che $\mathcal{C}$ è connesso per archi. Sia $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$. Allora, per definizione di insieme controllabile, esistono due controlli $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$, rispettivamente di successo per x_1 e x_2. In particolare esistono due tempi $t_1 \geq 0$ e $t_2 \geq 0$ tali che

$$y_{x_1}(t_1; \alpha_1), y_{x_2}(t_2; \alpha_2) = 0.$$

Abbiamo quindi due cammini in $I\!R^n$

$$y_1 : [0, t_1] \to I\!R^n,\ y_1(t) = y_{x_1}(t; \alpha_1); \quad y_2 : [0, t_2] \to I\!R^n,\ y_2(t) = y_{x_2}(t; \alpha_2).$$

È chiaro che percorrendo prima il cammino $y_1(\cdot)$ da x_1 a 0 e poi a ritroso il cammino $y_2(\cdot)$ da 0 a x_2, otteniamo un cammino (continuo) in $I\!R^n$ che connette x_1 con x_2. Abbiamo provato che $\mathcal{C}$ è connesso per archi se proviamo che tutti i punti di questo cammino congiungente x_1 con x_2 sono punti di $\mathcal{C}$. Basta provare che, per ogni $t \in [0, t_1]$, $y_{x_1}(t; \alpha_1) \in \mathcal{C}$ (il caso per l'altro cammino è del tutto analogo). Dobbiamo perciò provare che per ogni $t \in [0, t_1]$, esiste un controllo di successo α^* per $x^* := y_{x_1}(t; \alpha_1)$. Ma questo discende immediatamente da Proposizione 1.1) (vedi anche Osservazione 1.4), che assicura che un controllo di successo per $y_{x_1}(t; \alpha_1)$ è $\alpha_1(\cdot + t)$ con tempo di raggiungimento $t_1 - t$.

Proviamo ora la seconda parte. Notiamo che ovviamente $0 \in \mathcal{C}$ (tutti i controlli sono di successo per 0 con tempo di raggiungimento $t = 0$). Pertanto, se $\mathcal{C}$ è aperto, è evidente che $0 \in \mathrm{Int}\mathcal{C}$. Viceversa, supponiamo $0 \in \mathrm{Int}\mathcal{C}$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $B(0,\delta) \subseteq \mathcal{C}$. Sia $x \in \mathcal{C}$, proviamo che esiste $\overline{\delta} > 0$ tale che $B(x,\overline{\delta}) \subseteq \mathcal{C}$, da cui la conclusione che $\mathcal{C}$ è aperto. Poiché $x \in \mathcal{C}$, esistono $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ e $\overline{t} \geq 0$ tali che $y_x(\overline{t};\alpha_1) = 0$. Allora, per (1.8), esiste $\overline{\delta} > 0$ tale che

$$|z - x| \leq \overline{\delta} \Rightarrow |y_z(\overline{t};\alpha)| \leq \delta,$$

ovvero $y_z(\overline{t};\alpha_1) \in B(0,\delta) \subseteq \mathcal{C}$: basta prendere $\overline{\delta} \leq \delta e^{-L\overline{t}}$. Quindi per $y_z(\overline{t};\alpha_1)$ esiste un controllo di successo α_2 che conduce $y_z(\overline{t};\alpha_1)$ nell'origine in tempo finito. Per la Proposizione 1.2 il controllo $\overline{\alpha}$ definito come in (1.7) è un controllo di successo per z e quindi $z \in \mathcal{C}$. $\square$

2.1 Il caso lineare.

Consideriamo ora il sistema (1.1) nel caso lineare, cioè nel caso in cui f sia lineare nei suoi argomenti:

$$\begin{cases} y'(t) = Py(t) + Q\alpha(t) \quad t > 0, \\ y(0) = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

dove P e Q sono, rispettivamente, matrici $n \times n$ e $n \times m$ a coefficienti costanti. Se poniamo quindi $f(x,a) := Px + Qa$ (notare che $a \in A \subset \mathbb{R}^m$), si vede facilmente che f verifica le ipotesi (1.2).

Ricordiamo che la formula risolutiva per (2.1) è

$$y_x(t;\alpha) = e^{tP}\left(x + \int_0^t e^{-sP}Q\alpha(s)ds\right), \tag{2.2}$$

dove, per ogni $r \in \mathbb{R}$, e^{rP} è la matrice esponenziale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k P^k}{k!},$$

dove P^k è la matrice ottenuta dal prodotto righe per colonne $PP\cdots P$ ripetuto k volte.

Assumiamo come bersaglio $\mathcal{T} = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Supponiamo inoltre che l'insieme dei controlli costanti sia simmetrico e convesso, cioè che

$$\begin{aligned} &a \in A \text{ se e soltanto se } -a \in A, \\ &\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 \in A \quad \forall\, a_1, a_2 \in A \;\forall\, \lambda \in [0,1]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Notiamo che la condizione che A sia simmetrico e convesso implica che $0 \in A$ (è ovvio che stiamo supponendo $A \neq \emptyset$). Ne segue che, essendo $0 \in A$, una volta arrivati sul bersaglio, possiamo restarci per tutti i tempi successivi, usando il contgrollo costante $\alpha \equiv 0$ (infatti $P0 + Q0 = 0$, dove il primo e terzo 0 sono lo zero di $I\!R^n$ mentre il secodo è lo zero di $I\!R^m$). In particolare quindi, il sistema verifica la seguente condizione

$$f(0,0) = 0. \tag{2.4}$$

Proposizione 2.2 *Se vale la condizione (2.3), allora l'insieme controllabile $\mathcal{C}$ è convesso in $I\!R^n$.*

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che

$$x \in \mathcal{C} \text{ se e soltanto se } \exists\, \alpha \in \mathcal{A},\ t \geq 0 \text{ tali che } x = -\int_0^t e^{-Ps} Q\alpha(s) ds. \tag{2.5}$$

Questo discende immediatamente dalla definizione di punto controllabile e dalla formula (2.2) (e dal fatto che la matrice esponenziale è non singolare). Notiamo che, in virtù di (2.4), per ogni coppia (controllo,tempo di raggiungimento) (α, t) che verifica (2.5) per un fissato x, qualunque sia $\tau \geq t$ esiste una coppia (β, τ) che ancora soddisfa a (2.5). Infatti basta definire

$$\beta(s) = \begin{cases} \alpha(s) & \text{se } 0 \leq s \leq t, \\ 0 & \text{se } s > t. \end{cases}$$

Siano $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ e $\lambda \in [0,1]$. Per la caratterizzazione (2.5) e per la considerazione ad essa immediatamente successiva, esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ e $t \geq 0$ tali che

$$x_1 = -\int_0^t e^{-sP} Q\alpha_1(s) ds, \quad x_2 = -\int_0^t e^{-sP} Q\alpha_2(s) ds.$$

Ne segue che

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = -\int_0^t e^{-sP} Q \left(\lambda \alpha_1(s) + (1-\lambda)\alpha_2(s)\right) ds$$

e quindi $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathcal{C}$ che conclude la dimostrazione (notare che il controllo $\overline{\alpha}(s) := \lambda\alpha_1(s) + (1-\lambda)\alpha_2(s)$ appartiene a $\mathcal{A}$, in virtù della convessità di A). $\square$

Definiamo la <u>matrice di controllabilità</u>

$$S := [Q, PQ, P^2Q, \cdots, P^{n-1}Q]. \tag{2.6}$$

La matrice S è una matrice $n \times (mn)$ in cui il primo blocco $n \times m$ è la matrice Q, il secondo blocco $n \times m$ è la matrice PQ, il terzo blocco $n \times m$ è la matrice P^2Q e così via. L'importanza della matrice di controllabilità è messa in luce dal seguente risultato.

Teorema 2.3 *Valga (2.3). Allora si ha che: la matrice S ha rango massimo, cioè uguale a n, se e soltanto se $0 \in \mathrm{Int}\mathcal{C}$ (e quindi se e soltanto se $\mathcal{C}$ è aperto, per Teorema 2.1).*

Dimostrazione. i) Proviamo che

$$\mathrm{rango} S < n \Rightarrow 0 \notin \mathrm{Int}\mathcal{C}. \tag{2.7}$$

Se rango$S < n$, allora esiste un vettore unitario $\xi \in \mathbb{R}^n$ che è perpendicolare ad ogni colonna di S (se così non fosse, allora esisterebbero n colonne di S linearmente indipendenti, e quindi esisterebbe un minore di S di ordine n non singolare). Pertanto si ha

$$\xi^T P^k Q = 0 \ \ \forall\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

dove ξ^T è il vettore trasposto (cioè "vettore riga"). Per il Teorema di Hamilton-Cayley, P^n è combinazione lineare delle sue potenze precedenti, cioè esistono $c_1 \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n-1$, tali che

$$P^n = c_1 P^{n-1} + c_2 P^{n-2} + \cdots c_{n-1} P + c_n I, \tag{2.8}$$

dove I è la matrice identica $n \times n$. Ne segue pertanto

$$\xi^T P^n Q = c_1 \xi^T P^{n-1} Q + \cdots c_n Q = 0. \tag{2.9}$$

Moltiplicando (2.8) per $\xi^T P$ otteniamo anche $\xi^T P^{n+1} Q = 0$ e in definitiva $\xi^T P^k Q = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per definizione di matrice esponenziale, si ha quindi

$$\xi^T e^{-sP} Q = 0 \quad \forall\, s \in I\!R.$$

Sia ora $x \in \mathcal{C}$. Allora, per (2.5), esistono $\overline{\alpha}$ e $\overline{t}$ tali che

$$x = -\int_0^{\overline{t}} e^{-sP} Q \overline{\alpha}(s) ds,$$

da cui segue, per (2.9), che $\xi^T x = 0$ e quindi che x giace sull'iperpiano di $I\!R^n$ passante per l'origine e ortogonale a ξ. Pertanto, per l'arbitrarietà di $x \in \mathcal{C}$, si ha che tutto $\mathcal{C}$ giace su tale iperpiano e quindi non può essere un intorno dell'origine.

ii) Proviamo che

$$0 \notin \mathrm{Int}\mathcal{C} \Rightarrow \mathrm{rango} S < n.$$

Per (2.3) l'insieme dei controlli misurabili $\mathcal{A}$ è simmetrico e convesso. Poiché $0 \notin \mathrm{Int}\mathcal{C}$, essendo $\mathcal{C}$ convesso, esiste un iperpiano di $I\!R^n$ passante per 0 e che "lascia" $\mathcal{C}$ "tutto da una parte". Ovvero, esiste un vettore unitario $\xi \in I\!R^n$ tale che $\xi^T x \leq 0$ per ogni $x \in \mathcal{C}$. Da (2.5), ne segue che, fissato $t \geq 0$

$$\int_0^t \xi^T e^{-sP} Q \alpha(s) ds \geq 0 \ \ \forall\, \alpha \in \mathcal{A}.$$

Poiché questa disuguaglianza vale qualunque sia il controllo $\alpha \in \mathcal{A}$, essa deve valere per α e per $-\alpha$ (in virtù della simmetria di $\mathcal{A}$), da cui si deduce che

$$\int_0^t \xi^T e^{-sP} Q \alpha(s) ds = 0 \ \ \forall\, \alpha \in \mathcal{A}.$$

e questo, è noto, implica $\xi^T e^{-sP} Q = 0$ per ogni $s \in [0, t]$. Per l'arbitrarietà di $t \geq 0$ otteniamo anche

$$\xi^T e^{-sP} Q = 0 \ \ \forall\, s \geq 0. \tag{2.10}$$

Derivando (2.10) k volte rispetto a s (ricordando che $(e^{-sP})' = -Pe^{-sP}$), si ottiene $\xi^T P^k Q = 0$ per ogni $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Quindi ξ^T è ortogonale a tutte le colonne di S che quindi non può avere rango massimo, cioè $\mathrm{rango} S < n$. $\square$

Per quanto riguarda le "dimensioni" dell'insieme controllabile $\mathcal{C}$, enunciamo, senza dimostrazione, il seguente risultato.

Teorema 2.4 *Valga l'ipotesi (2.3). Allora si ha che:* $\mathcal{C} = I\!R^n$ *se soltanto se* $\mathrm{rango} S = n$ *e tutti gli autovalori di* P *hanno parte reale non positiva* (≤ 0)*.*

2.2 Cenni al caso non lineare.

Il paragrafo precedente analizza la controllabilità nel caso in cui il sistema controllato (1.1) sia il sistema lineare (2.1) e, nella dimostrazione dei risultati, la linearità gioca un ruolo essenziale. Spesso però i modelli sono non lineari. Qui vogliamo enunciare un risultato di controllabililtá, senza dimostrazione, per il caso non lineare, in cui l'idea è quello di approssimare il sistema non lineare con uno lineare.

Facciamo la seguente ipotesi

$$f \text{ soddisfa } (1.2),\ (2.4) \text{ ed inoltre è } C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n). \tag{2.11}$$

Usando la formula di Taylor al primo ordine per f centrata in $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e ricordando che $f(0,0) = 0$, si ha

$$f(x,a) = P_f x + Q_f a + o(|x| + |a|),$$

dove P_f è la matrice jacobiana $n \times n$ di f delle derivate parziali prime in $(0,0)$ rispetto alle n componenti di $x \in \mathbb{R}^n$, e Q_f è la matrice jacobiana $n \times m$ delle derivate parziali prime in $(0,0)$ rispetto alle m componenti di $a \in \mathbb{R}^m$. Definiamo quindi la matrice di controllabilità

$$S_f := [Q_f, P_f Q_f, P_f^2 Q_f, \dots, P_f^{n-1} Q_f].$$

Teorema 2.5 *Valgano (2.11) e (2.3). Allora*

$$rango S_f = n \Rightarrow 0 \in Int\mathcal{C}. \tag{2.12}$$

Osservazione 2.6 *L'implicazione inversa in (2.12), che vale nel caso lineare, non è in generale vera nel caso non lineare.*

3 Controllo Ottimo.

In questo paragrafo, ci occupiamo del problema di controllo ottimo. Supponiamo ancora di considerare il bersaglio $\mathcal{T} = \{0\}$. Fissato $x \in \mathcal{C}$, si vuole determinare (se esiste) un controllo di successo per x che, fra tutti i controlli di successo per x, rende minimo il valore di un funzionale costo del tipo

$$J(x,\alpha) = \int_0^{t_x(\alpha)} \ell(y_x(s;\alpha), \alpha(s))ds, \tag{3.1}$$

dove $t_x(\alpha)$ è il tempo di raggiungimento del bersaglio per la traiettoria $y_x(\cdot;\alpha)$ (vedi (1.4)). Le ipotesi sul costo corrente $\ell : \mathbb{R}^n \times A \to [0,+\infty[$ sono le seguenti (confronta con (1.2)):

$$\ell \text{ è continua, limitata e lipschitziana in } x \text{ uniformemente in } a. \tag{3.2}$$

Un controllo che realizza tale minimo si dice un <u>controllo ottimo</u> per x.

3.1 Condizioni sufficienti per l'esistenza di controlli ottimi.

In generale, l'esistenza di un controllo ottimo non è garantita. Ci sono alcuni criteri che danno delle condizioni sufficienti affinché un controllo ottimo esista (ciò significa che un controllo ottimo può esistere anche se le condizioni sufficienti non sono verificate). Ne enunciamo uno, senza riportarne la dimostrazione.

Consideriamo il sistema controllato non lineare (1.1), con dinamica f soddisfacente a (1.2), e consideriamo il problema di controllo ottimo consistente nel minimizzare un funzionale costo come in (3.1), (3.2), al variare del controllo tra tutti i controlli di successo (con bersaglio $\mathcal{T} = \{0\}$).

Teorema 3.1 *Sia $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ controllabile. Supponiamo che l'insieme*

$$\mathcal{M} := \Big\{(f(x,a), \ell(x,a))\Big| a \in A\Big\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

sia convesso in $\mathbb{R}^{n+1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo inoltre che, per un fissato $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_0^{t_{\overline{x}}(\alpha)} \ell(y_{\overline{x}}(s;\alpha), \alpha(s))ds \to +\infty \text{ se } t_{\overline{x}}(\alpha) \to +\infty.$$

Allora esiste un controllo ottimo per $\overline{x}$.

3.2 Il Principio del Massimo di Pontryagin (PMP).

Nel paragrafo precedente, abbiamo enunciato una condizione sufficiente affinché, per un problema di controllo alquanto generale, esista un controllo ottimo. Questa condizione non dice comunque nulla su come determinare o "costruire" un tale controllo ottimo. È quindi importante avere a disposizione un criterio per selezionare un numero ristretto di controlli tra i quali cercare l'eventuale controllo ottimo, una volta essersene accertati dell'esistenza. Questo tipo di criteri consistono in condizioni necessarie di ottimalità e vanno spesso sotto il nome di Principio del Massimo.

Consideriamo un problema di controllo ottimo per il sistema non lineare (1.1) con f soddisfacente a (1.2), bersaglio $\mathcal{T} = \{0\}$ e costo dato da (3.1), (3.2).

Teorema 3.2 *[Prinicpio del Massimo di Pontryagin (PMP)]. Supponiamo che f ed ℓ siano differenziabili rispetto alla variabile $x \in I\!R^n$. Sia $x \in I\!R^n$ controllabile. Sia $\alpha^* \in \mathcal{A}$ ottimo per x e sia $t^* := t_x(\alpha)$ il tempo di raggiungimento per la corrispondente traiettoria $y^* := y_x(\cdot;\alpha^*)$. Allora esistono una funzione assolutamente continua $w : [0,t^*] \to I\!R^n$ ed un numero reale λ tali che*

$$\begin{cases} w'(t) = -w(t)^T D_x f(y^*(t),\alpha^*(t)) - \lambda \nabla_x \ell(y^*(t),\alpha^*(t)) \quad q.o.\ 0 < t < t^*, \\ 0 = \sup\limits_{a \in A} \{-f(y^*(t),a) \cdot w(t) - \lambda \ell(y^*(t),a)\} \ \ \forall\ 0 \le t \le t^*, \\ 0 = -f(y^*(t),\alpha^*(t)) \cdot w(t) - \lambda \ell(y^*(t),\alpha^*(t)) \ \ q.o.\ 0 \le t \le t^*; \\ \lambda \in \{0,1\},\ \ \lambda = 0 \ \Rightarrow\ w(t) \neq 0 \ \forall\ 0 \le t \le t^*, \end{cases} \tag{3.3}$$

dove "·" indica il prodotto scalare in $I\!R^n$, $D_x f$ è la matrice jacobiana di f rispetto alle sole componenti di $x \in I\!R^n$ e $\nabla_x \ell$ è il gradiente di ℓ rispetto alle sole componenti di $x \in I\!R^n$.

Il Principio del Massimo dice quindi che se α^* è ottimo per x, allora esistono due opportune variabili aggiunte, $w(\cdot)$ e λ, (dette anche co-stati) tali che, ad ogni istante $t \in [0,t^*]$, per ogni $a \in A$ si ha

$$-f(y^*(t),a) \cdot w(t) - \lambda \ell(y^*(t),a) \le 0,$$

e, per quasi ogni t, l'uguaglianza a zero (condizione di *massimalità*) è ottenuta per $a = \alpha^*(t)$. Ovviamente, questo non implica che ci siano, per ogni t, altri $a \in A$ per cui vale l'uguaglianza a zero. In particolare, mettiamo in risalto la seguente osservazione.

Osservazione 3.3 *Il Principio del Massimo di Pontryagin è solamente una condizione necessaria per l'ottimalità. Questo significa che se un controllo* α *è ottimo, allora sicuramente esiste un co-stato* $(w(\cdot), \lambda)$ *che verifica (3.3), ma viceversa, il fatto che per un controllo* α *esista un co-stato che verifica (3.3) non implica che* α *sia ottimo. Addirittura, l'insieme dei controlli per cui esiste un co-stato che verifica (3.3) potrebbe essere non vuoto, mentre l'insieme dei controlli ottimi potrebbe essere vuoto, cioè potrebbe non esistere un controllo ottimo. Se però, in virtù di altri risultati di esistenza, noi sappiamo a priori che un controllo ottimo esiste, allora possiamo determinare tutti i controlli per i quali esiste un co-stato che verifica (3.3) (e almeno uno ne esiste: uno ottimo), e tra questi determinare quelli che hanno costo minimo: questi ultimi sono sicuramente ottimi. Se ad esempio i controlli per i quali è verificato il Principio del Massimo sono in numero finito, allora la ricerca di quelli con costo minimo è senz'altro agevole.*