RICORRENZE LINEARI

Una successione $x_0, x_1, x_2, \ldots$ di numeri viene definita per **ricorrenza** (o in maniera ricorsiva) se ogni numero della successione è completamente determinato da quelli che vengono prima di lui. Tali successioni sono frequenti in matematica ed informatica, come anche in altre discipline scientifiche.

La più semplice successione ricorsiva si ottiene quando x_{k+1} è un multiplo fissato di x_k per ogni k, ossia $x_{k+1} = ax_k$. In questo caso, se x_0 viene assegnato, i rimanenti x_k possono essere calcolati in successione:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & = & ax_0 & & \\ x_2 & = & ax_1 & = & a^2x_0 \\ x_3 & = & ax_2 & = & a^3x_0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Chiaramente si avrà $x_k = a^k x_0$ per ogni $k \geq 0$. Quindi in questo caso particolare, dato x_0, abbiamo una formula esplicita per x_k come funzione di k. In casi più generali, una formula esplicita per x_k non è sempre così semplice da trovare.

Supponiamo ora che i numeri $x_0, x_1, x_2, \ldots$ siano dati mediante una **relazione di ricorrenza lineare**, ad esempio

$$x_{k+2} = x_{k+1} + 2x_k \quad \text{per} \quad k \geq 0,$$

e supponiamo che x_0 e x_1 siano assegnati.

Se $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$, la successione risulta facilmente determinata, infatti si avrà:

$$\begin{array}{lllll} x_0 & = & 1 & & \\ x_1 & = & 2 & & \\ x_2 & = & x_1 + 2x_0 & = & 4 \\ x_3 & = & x_2 + 2x_1 & = & 8 \\ x_4 & = & x_3 + 2x_2 & = & 16 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

da cui deduciamo che $x_k = 2^k$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, inoltre possiamo verificare usando il Principio di induzione che tale formula vale per ogni k.

Tuttavia se invece fissiamo $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$, avremo:

$$\begin{array}{lclcl} x_0 & = & 1 & & \\ x_1 & = & 1 & & \\ x_2 & = & x_1 + 2x_0 & = & 3 \\ x_3 & = & x_2 + 2x_1 & = & 5 \\ x_4 & = & x_3 + 2x_2 & = & 11 \\ x_5 & = & x_4 + 2x_3 & = & 21 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

e in questo caso la successione risulta unicamente determinata dalla formula ricorsiva, ma nessuna formula ci risulta evidente.
È possibile però trasformare la ricorrenza in una **ricorrenza matriciale**, ovvero in una relazione ricorsiva del tipo

$$V_{k+1} = AV_k \quad \text{per} \quad k \geq 0,$$

dove $V_1, V_2, V_3 \ldots$ è la successione dei vettori

$$V_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix},$$

ed A è una matrice 2×2, nel nostro esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ragionando analogamente a quanto fatto per il primo esempio di ricorsione che abbiamo visto ($x_{k+1} = ax_k$), si ottiene facilmente una formula esplicita per V_{k+1}:

$$V_{k+1} = A^k V_1 \quad \text{per} \quad k \geq 0$$

dove, ovviamente,

$$V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Siamo pertanto in grado di calcolare facilmente V_{k+1} (e quindi x_{k+1}) se siamo capaci di calcolare le potenze A^k della matrice A.
In particolare sappiamo che se A è diagonalizzabile, e cioè esistono una matrice invertibile B e una matrice diagonale D tali che

$$D = B^{-1}AB,$$

allora

$$A^k = BD^kB^{-1},$$

e D^k è la matrice diagonale che ha sulla diagonale le potenze k-esime degli elementi della diagonale di D. Quindi nel caso in cui A sia una matrice diagonalizzabile le sue potenze vengono calcolate facilmente e quindi anche V_k viene ricavato rapidamente.

Riprendiamo l'esempio, abbiamo visto che nel nostro caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mentre avevamo preso $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$ e quindi

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che A è diagonalizzabile con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

la cui inversa è

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

e

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$A^k = B \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} B^{-1},$$

e quindi

$$V_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left[(-1)^{k+1} + 2^{k+2}\right] \\ \\ \frac{1}{3}\left[(-1)^k + 2^{k+1}\right] \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo una formula esplicita per x_k in funzione di k:

$$x_k = \frac{1}{3}\left[(-1)^k + 2^{k+1}\right].$$

Esercizio 1. Determinare una formula esplicita per x_k definito dalla seguente ricorrenza lineare:

$$x_k = 3x_{k-1} - 2x_{k-2},$$

con valori iniziali $x_0 = -1$, $x_1 = 1$.

Esercizio 2. Determinare una formula esplicita per x_k definito dalla seguente ricorrenza lineare:

$$x_k = 3x_{k-1} + 4x_{k-2},$$

con valori iniziali $x_0 = 17$, $x_1 = 3$.