COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA 9/2/2010

Esercizio 1. Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = x+y+z$, e l'insieme (chiuso e limitato)

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1\right\}.$$

Determinare il massimo e il minimo di f su S e i punti in cui essi sono raggiunti.

Soluzione. La funzione f è di classe C^1, S è chiuso e limitato e pure la funzione vincolo $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy-1$ è di classe C^1. Quindi, per il teorema di Wierstrass, siamo sicuri che il massimo e il minimo di f su S esistono e inotre possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Vediamo se su S ci sono punti singolari (sui quali il metodo dei moltiplicatori di Lagrange non si applica):

$$\nabla g(x,y,z) = (2x-y, 2y-x, 2z) = (0,0,0) \implies (x,y,z) = (0,0,0) \notin S.$$

Quindi non ci sono punti singolari. Il gradiente di f è $\nabla f(x,y,z) = (1,1,1)$ e quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x-y) \\ 1 = \lambda(2y-x) \\ 1 = 2\lambda z \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che deve essere $\lambda \neq 0$ e quindi, uguagliando le prime due equazioni, si ha

$$2x - y = 2y - x \implies x = y = a,$$

e quindi anche

$$\lambda = \frac{1}{a}.$$

Dalla terza equazione segue quindi

$$z = \frac{a}{2}.$$

Inserendo nell'equazione vincolo si ha

$$g(a,a,\frac{a}{2})=0 \implies a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Abbiamo quindi trovato i due punti

$$P_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\quad P_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Si conclude quindi che il massimo di f è $\sqrt{5}$ assunto in P_1 e il minimo è $-\sqrt{5}$ assunto in P_2.

Esercizio 2. Calcolare il volume della regione di spazio in $\mathbb{R}^3$ sopra l'insieme del piano

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|0\leq y-x\leq 1, 0\leq 4x-2y\leq 1\right\},$$

e sotto al grafico della funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(3x-y)^2$.

Soluzione. Dobbiamo calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_D f(x,y)dxdy=\int\int_D (3x-y)^2dxdy.$$

Operiamo il seguente cambio di variabili

$$u=y-x,\quad v=4x-2y,$$

da cui, invertendo, si ha la traformazione

$$(x,y)=\varphi(u,v)=\left(u+\frac{v}{2},2u+\frac{v}{2}\right).$$

Il determinante della matrice Jacobiana di φ è $-1/2$ e quindi il suo modulo è $1/2$. Componendo f con φ si ha

$$\tilde{f}(u,v)=f(\varphi(u,v))=(u+v)^2.$$

Nelle variabili (u,v) l'insieme su cui integrare è

$$\tilde{D}=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\middle|0\leq u\leq 1, 0\leq v\leq 1\right\}.$$

Il volume richiesto è allora

$$\int\int_{\tilde{D}} \frac{1}{2}(u+v)^2 dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 (u+v)^2 dudv = \frac{7}{12}.$$

Esercizio 3. Da un sacchetto contenente 3 palline colorate (due bianche e una rossa) si effettuano due estrazioni (casuali) con la seguente regola: se la prima pallina estratta è bianca, allora non si reinserisce la pallina nel sacchetto e si effettua la seconda estrazione; se la prima pallina estratta è rossa, allora si reinserisce la pallina nel sacchetto e si effettua la seconda estrazione.

1) Calcolare la probabilità di: 1a) estrarre due palline bianche, 1b) estrarre due palline rosse, 1c) estrarre prima una bianca e poi una rossa, 1d) estrarre prima una rossa e poi una bianca, 1e) estrarre una rossa e una bianca (indipendentemente dall'ordine).

2) I signori Bianchi e Rossi scommettono un euro sul colore della seconda pallina estratta: se è rossa Bianchi dà un euro a Rossi, se è bianca Rossi dà un euro a Bianchi. 2a) Dopo tre scommesse (ogni volta effettuata ripristinando il sacchetto inziale con le tre palline e effettuando due estrazione con la regola di cui sopra), qual è la probabilità che Rossi non abbia perso soldi? 2b) Se la prima scommessa dà ragione a Rossi (cioè il colore della seconda estratta è rosso), qual è ora la probabilità che dopo altre due scommesse Rossi alla fine non abbia perso soldi?

Soluzione. La probabilità che la prima pallina estratta sia bianca è $2/3$. La probabilità che la prima pallina estratta sia rossa è $1/3$. Se la prima estratta è bianca allora la probabilità che la seconda sia bianca o che la seconda sia rossa è $1/2$ in entrambi i casi. Se la prima estratta è rossa allora la probabilità che la seconda sia bianca è $2/3$, mentre la probabilità che la seconda sia rossa è $1/3$.

1) Ne segue quindi che

1a) due bianche $\Longrightarrow p = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$;

2a) due rosse $\Longrightarrow p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$;

1c) prima bianca poi rossa $\Longrightarrow p = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$;

1d) prima rossa poi bianca $\Longrightarrow p = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$;

1e) bianca e rossa (indipentemente dall'ordine) $\Longrightarrow p = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.

2) Dal punto precedente si ha che la probabilità che la seconda estratta sia bianca è $1/3 + 2/9 = 5/9$. La probabilità che la seconda estratta sia rossa è $1/9 + 1/3 = 4/9$.

2a) Rossi, nel giro di tre scommesse, non perde soldi se esce per almeno due volte la pallina rossa come seconda estratta. Indicando con R e B il colore della seconda estratta, i casi favorevoli corrispondono alle terne ordinate (prima entrata=prima scommessa, seconda entrata=seconda scommessa, terza entrata=terza scommessa).

$$(R, R, R), (R, R, B), (R, B, R), (B, R, R)$$

Essendo le scommesse indipendenti, e i vari casi incompatibili, abbiamo la seguente probabilità

$$p = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{304}{729}.$$

2b) Avendo già vinto la prima, Rossi non perde soldi solamente se, nelle seguenti due scommesse, esce almeno una volta la pallina rossa come seconda estratta. I casi favorevoli sono quindi (elencando solo le seconde due scommesse)

$$(R, R), (R, B), (B, R).$$

Come prima si ha pertanto la probabilità

$$p = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{56}{81}.$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} & \text{se } 0 \leq x \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \dfrac{1}{x^3} & \text{se } x \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

i) Si abbozzi il grafico di f.

ii) Si provi che f è la densità per una variabile aleatoria continua X.

iii) Calcolare la funzione ripartizione di X, F_X, e abbozzarne il grafico.

iv) Calcolare il valore di aspettazione di X.

v) Definita una nuova variabile aleatoria $Y = 2X$, qual è la probabilità che Y assuma valori compresi tra 4 e 6?

Soluzione. ii) f è una densità se è non negativa (e lo è) e se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Calcolando, si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \\
&\int_{0}^{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} dx + \int_{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \\
&\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.
\end{aligned}$$

iii) La funzione di ripartizione si può calcolare, a partire dalla densità, come

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

Si ha pertanto

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} t & \text{se } 0 < t < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ 1 - \frac{1}{2t^2} & \text{se } t \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

iv) Il valora d'aspettazione di X si calcola come

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} x dx + \int_{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

v) La probabilità richiesta è

$$\begin{aligned}
&p\left(4 \leq Y \leq 6\right) = p\left(4 \leq 2X \leq 6\right) = p\left(2 \leq X \leq 3\right) = \\
&\int_{2}^{3} f(x)dx = \int_{2}^{3} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{8} - \frac{1}{18} = \frac{5}{72}.
\end{aligned}$$