**COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - 20 LUGLIO 2010**

**Esercizio 1.** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - 3y - \log(1+x).$$

i) Determinare l'insieme di definizione di $f$, $A$.
ii) Determinare gli eventuali punti stazionari di $f$ in $A$.
iii) Studiare la natura dei punti stazionari di $f$.
iv) $f$ ammette massimo e/o minimo assoluto su $A$?
(N.B. Attenzione che i punti stazionari da prendere in considerazione devono stare dentro al dominio di definizione della funzione $f$.)

**Soluzione.** i) L'unica condizione è che l'argomento del logaritmo sia maggiore di zero. Quindi

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x > -1 \right\}.$$

ii) Il gradiente di $f$ è

$$\nabla f(x,y) = \left( 2x - \frac{1}{1+x}, 3y^2 - 3 \right),$$

che, eguagliato a $(0,0)$ porge

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \quad y = \pm 1.$$

Dovendo essere $x > -1$, si hanno i punti stazionari in $A$:

$$P_1 = \left( \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1 \right), \quad P_2 = \left( \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, -1 \right).$$

iii) La matrice hessiana di $f$ è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{(1+x)^2} & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamete che $H_f(P_1)$ è definita positiva e quindi che $P_1$ è un minimo locale, mentre $H_f(P_2)$ è indefinita e quindi $P_2$ è un punto di sella.

iv) $f$ non ammette massimo assoluto su $A$, perché se questo ci fosse dovrebbe essere anche un massimo locale ($A$ è aperto), ma non ci sono massimi locali. $f$ non ha nemmeno minimo assoluto su $A$ perché

$$\lim_{y \to -\infty} f(0, y) = -\infty.$$

**Esercizio 2.** Dati il dominio del piano

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ x \leq y \right\},$$

e le funzioni $f(x, y) = 8x^2 + 8y^2$, $g(x, y) = x + y$,

i) disegnare il dominio $D$,

ii) provare che $g(x, y) \leq f(x, y)\ \forall (x, y) \in D$,

iii) calcolare il volume della regione di spazio

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x, y) \in D,\ g(x, y) \leq z \leq f(x, y) \right\}.$$

(N.B. Il punto iii) può essere svolto assumendo per verificato il punto ii))

**Soluzione.** i) $D$ è il pezzo di corona circolare dic entro l'origine, raggio inferiore 1, ragio superiore 2 e con angolo compreso tra $\pi/4$ e $\pi$.

ii) Per ogni $(x, y) \in D$ si ha $1 \leq |x|, |y| \leq 2$ e quindi

$$g(x, y) = x + y \leq 4 \leq 16 \leq 8(x^2 + y^2) = f(x, y).$$

iii) In virtù del punto ii), dobbiamo calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_D (8x^2 + 8y^2 - x - y) dx dy.$$

Utilizzando le coordinate polari si ha

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_1^2 (8\rho^2 - \rho \cos\theta - \rho \sin\theta) \rho d\rho d\theta = \frac{45}{2}\pi - \frac{7}{3}.$$

**Esercizio 3.** Si considerino le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ così definite

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ xe^{-x} & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

i) Provare che $f_X$ e $f_Y$ sono le funzioni densità di due variabili aleatorie continue, $X$ e $Y$ rispettivamente.

ii) Calcolare le funzioni di ripartizione $F_X$ e $F_Y$ delle due variabili aleatorie $X$ e $Y$ rispettivamente.

iii) Supponiamo che $X$ e $Y$ rappresentino il tempo di vita atteso di due apparecchiature indipendenti $G_X$ e $G_Y$ rispettivamente. Siano $G_Z$ e $G_W$ le due apparecchiature ottenute mettendo $G_X$ e $G_Y$ in parallelo e in serie, rispettivamente. Calcolare la densità di probabilità della variabile aleatoria "tempo di rottura" di $G_Z$ e di $G_W$, rispettivamente.

**Soluzione.** i) Per definizione di funzione densità, basta provare $f_X, f_Y \geq 0$ e che il loro integrale su tutto $\mathbb{R}$ è uguale a 1. Che siano positive è ovvio, e un semplice conto dà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx = 1.$$

ii) Se $t \leq 0$, allora $F_X(t) = F_Y(t) = 0$. Se invece $t > 0$ allora

$$F_X(t) = \int_0^t f_X(x)dx = -te^{-t} - e^{-t} + 1, \quad F_Y(t) = \int_0^t f_Y(x)dx = 1 - \frac{1}{1+t}.$$

iii) Sappiamo che le variabili aleatorie $Z$ e $W$ richieste sono $Z = \max\{X, Y\}$ e $W = \min\{X, Y\}$. Da ciò si deducono facilmente le funzioni densità, che si possono ottenere con alcuni conti fatti a lezione e che si trovano anche nel libro di testo.

**Esercizio 4.** Un dato esperimento di laboratorio, ripetuto 20 volte, ha dato, nell'opportuna unità di misura, i seguenti risultati:

0.15 (1 volta), 0.23 (4 volte), 0.26 (2 volte), 0.34 (6 volte) 0.36 (6 volte), 0.39 (1 volta).

i) Calcolare media, mediana, primo e terzo quartile, deviazione standard dei venti risultati e disegnare un grafico boxplot.

ii) Disegnare un istogramma continuo per le classi di numerosità $[0, 0.1[$, $[0.1, 0.3[$, $[0.3, 0.4[$, $[0.4, 0.5]$

iii) Supponiamo ora che i 20 dati in questione, $x_1, \ldots, x_{20}$, siano numeri positivi minori o uguali a 0.5, generati (casualmente?) da un calcolatore. Si consideri la variabile aleatoria bernoulliana che associa all' $i$-esimo esperimento il valore 0 se $0 < x_i \leq 0.25$ e invece il valore 1 se $0.25 < x_1 \leq 0.5$.

Supponendo che i nostri dati siano solo un campione (preso a caso) di una popolazione più vasta di numeri generati dal calcolatore, dire se, con i dati in nostro possesso, è possibile respingere ed eventualmente con che grado di affidabilità, l'ipotesi nulla "la variabile aleatoria bernoulliana ha media $p = \frac{1}{2}$" (che ovviamente sarebbe coerente con la generazione "casuale uniforme" dei numeri).

(Sugg. Usare il test $Z$,

coppie (*grado affidabilità, soglia*): $(0.1, 1.645)$, $(0.05, 1.960)$, $(0.01, 2.576)$)

**Soluzione (traccia).** ii) Notare che gli itervalli non hanno tutti la stessa ampiezza e che quindi sono le aree dei rettangoli dell'istogramma a dover rappresentare la numerosità.

iii) Nei venti esperimanti, la variabile aleatoria bernoulliana vale 5 volte 0 e 15 volte 1; ha quindi una media campionaria pari a $M = 3/4$. L'ipotesi nulla è media $p = 1/2$. Dobbiamo prima verificare se $n = 20$ è un numero di dati "sufficientemente grande". Sappiamo che per un fenomeno di Bernoulli con media $p$ questo èvero se

$$\min\{np, n(1-p)\} > 5.$$

Inserendo $n = 20$ e $p = 1/2$, verifichiamo che $n = 20$ è sufficientemente grande. La quantità pivotale del nostro test Z è

$$\frac{|M - \frac{1}{2}|}{\frac{1}{2}}\sqrt{20},$$

che, calcolata per $M = 3/4$ dà 2.236 che è maggiore di 1.960 ma minore di 2.576. Quindi, con i dati in nostro possesso, possiamo rigettare l'ipotesi nulla "p=1/2" con un'affidabilità dello 0.05.