COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - 8 SETTEMBRE 2010

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy + x^2 + y^2$.

i) Determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f su $\mathbb{R}^2$.

ii) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di f (e i punti in cui essi sono assunti) sull'insieme

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Soluzione. i) La funzione f è di classe C^1. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (y + 2x, x + 2y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0).$$

Quindi l'unico punto stazionario è l'origine. La matrice Hessiana di f in $(0,0)$ vale (in realtà essa è costante)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

che è, ovviamente, 2×2, ha il termine a_{11} positivo e determinete positivo. Quindi è definita positiva e pertanto $(0,0)$ è un punto di minimo locale.

ii) L'insieme C è chiuso e limitato (è il cerchio pieno chiuso di raggio 1 e centro l'origine), quindi, essendo f continua, massimo e minimo di f su C esistono. L'unico punto stazionario interno è l'origine; studiamo quindi la funzione sul bordo

$$\partial C + \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

Parametrizziamo ∂C (che è una circonferenza) con l'angolo $\theta \in [0, 2\pi]$, $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Si ha

$$\psi(\theta) = f(x,y) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = \cos\theta\sin\theta + 1.$$

Un semplice studio porge, come valori in cui si annulla ψ',

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4},\ \theta_2 = \frac{3\pi}{4},\ \theta_3 = \frac{5\pi}{4},\ \theta_4 = \frac{7\pi}{4},$$

a cui corrispondono i punti

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\\
P_3 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ P_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

I punti di massimo e minimo vanno quindi cercati tra P_1, P_2, P_3, P_4 e $(0,0)$. Un semplice conto dà:

minimo di f su C uguale a 0 raggiunto in $(0,0)$;

massimo di f su C uguale a $3/2$ raggiunto in P_1 e in P_3.

Esercizio 2. Si calcoli il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_E (z-x-y)dxdydz,$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| -2 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq \frac{1}{1+z^2}\right\}.$$

Soluzione. Possiamo intergare per strati, ponendo, per ogni z

$$D_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \leq \frac{1}{1+z^2}\right\}.$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
&\int\int\int_E (z-x-y)dxdydz = \int_{-2}^{1}\int\int_{D_z}(z-x-y)dxdydz\\
&= \int_{-2}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}}(z-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta dz\\
&= \frac{\pi}{2}(\log(2)-\log(5)).
\end{aligned}
$$

Esercizio 3. Siano $A, B, C \subset \Omega$ tre eventi, le cui probabilità sono

$$p(A) = \frac{1}{3},\ p(B) = \frac{1}{3},\ p(C) = \frac{1}{2}.$$

Si supponga che A e B siano indipendenti; che $(A \cap C)$ e $(B \cap C)$ siano incompatibili e che valga

$$p(A|C) = \frac{2}{9}, \quad p(B|C) = \frac{1}{6}.$$

i) Cacolare $p(A \cup B)$.
ii) Calcolare $p(A \cap C)$ e $p(B \cap C)$.
iii) Calcolare $p(C \cap (A \cup B))$.
iv) Calcolare $p(C|A \cup B)$.
v) Calcolare $p(A \cup B \cup C)$.

Suggerimento. Può essere utile ricordare la formula $C \cap (A \cup B) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Soluzione. i) Dalla formula $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B)$, essendo $P(A \cap B) = p(A)p(B)$ per l'indipendenza, si ha

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B) = \frac{5}{6}.$$

ii) Dalla formula $p(A|C) = P(A \cap C)/p(C)$ si ha

$$\frac{2}{9} = \frac{p(A \cap C)}{\frac{1}{2}} \implies p(A \cap C) = \frac{1}{9}.$$

Analogamente, $p(B \cap C) = 1/12$.

iii) Usando la formula nel suggerimento e ricordando che $p\left((A \cap C) \cap (B \cap C)\right) = 0$ per l'incompatibilità, si ha

$$\begin{aligned} &p\left(C \cap (A \cup B)\right) = p\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right) \\ &= p(A \cap C) + p(B \cap C) - p\left((A \cap C) \cap (B \cap C)\right) = \frac{7}{36}. \end{aligned}$$

iv) Si ha

$$p(C|A \cup B) = \frac{p(C \cap (A \cup B))}{p(A \cup B)} = \frac{7}{20}.$$

v) Si ha

$$\begin{aligned} &p(A \cup B \cup C) = p((A \cup B) \cup C) \\ &= p(A \cup B) + p(C) - p((A \cup B) \cap C) = \frac{31}{36}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Un insieme di 23 dati numerici sono ordinati in modo crescente

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{21} \le x_{22} \le x_{23},$$

e si ha $x_1 = 0$, $x_6 = 3$, $x_{12} = 5$, $x_{18} = 7.5$, $x_{23} = 10$.

i) Disegnare un grafico box-plot dei 23 dati.

ii) Sapendo che $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ha media 1, $\{x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}$ ha media 4, $\{x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}\}$ ha media 6, e che $\{x_{19}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}\}$ ha media 9, determinare la media $\overline{x}$ di tutti i 23 dati.

iii) Supponendo i 23 dati un campione di una misurazione su di una popolazione di individui, e supponendo il campione "preso a caso" e $n = 23$ sufficientemente grande, quale deviazione standard campionaria dovrebbero avere i nostri dati per poter dire che la media reale della misurazione sulla popolazione cade all'interno dell'intervallo

$$[\overline{x} - 0.1, \overline{x} + 0.1],$$

con un grado di fiducia del 95% almeno?

iv) È possibile che i nostri 23 dati abbiano una deviazione standard campionaria come quella trovata al punto iii)?

Soluzione. ii) Occorre calcolare una media pesata

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 1 + 3 + 5 \cdot 4 + 5 + 5 \cdot 6 + 7.5 + 5 \cdot 9}{23} = 5.02.$$

iii) Detta s la deviazione standard campionaria, avendo l'intervallo di fiducia richiesto semiampiezza pari a 0.1, da note formule, si ha

$$0.1 \ge \frac{2s}{\sqrt{23}} \implies s \le 0.239.$$

iv) No, non è possibile. Infatti la deviazione standard campionaria è così calcolata

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{23} (\overline{x} - x_i)^2}{22}},$$

e pertanto (prendendo solo il primo addendo della sommatoria, che è tutta a termini positivi) si ha

$$s \ge \sqrt{\frac{(5.02 - 0)^2}{22}} > 1.$$