Calcolabilità

I appello 06–07

Regole: si devono risolvere esercizi sia nel gruppo 1–3 che nel gruppo 4–6.

1. Confronto fra m–gradi r.e. e T–gradi r.e. (dare definizioni e produrre dimostrazioni).

2. Provare il seguente:

   Teorema: Sia $\mathcal{C}$ un sottoinsieme proprio di $\mathcal{R}^{(1)}$ tale che la funzione sempre divergente div $\in \mathcal{C}$ e sia $C = \{x : \varphi_x \in \mathcal{C}\}$. L'insieme C è produttivo.

3. Sia $A \subseteq \mathbf{N}$.

   (a) Definire l'insieme K^A. (Definire, o dire cosa sono, gli oggetti coinvolti nella definizione.)

   (b) Provare che $A \leq_T K^A$ e che $A \not\equiv_T K^A$.

4. Sia $A = \{x \in \mathbf{N} : \ \varphi_x^{-1}(\{0\})$ è finito e non vuoto$\}$.

   i. Dare un esempio di una funzione ricorsiva i cui indici sono tutti in A.

   ii. Dare un esempio di una funzione ricorsiva nessun indice della quale è in A.

   Motivando le risposte, dire quali fra le seguenti sono vere:

   (a) A è r.e.;

   (b) A è produttivo;

   (c) $\mathbf{0}_m < \mathrm{d}_m(A) < \mathbf{0}'_m$.

5. Sia $f \in \mathcal{R}_t^{(1)}$ una funzione *iniettiva* e sia $A \subseteq \mathbf{N}$. Provare che:

   (a) se A è produttivo, allora $f(A)$ è produttivo;

   (b) se A è creativo, allora $f(A)$ è creativo.

   (c) se $A \subseteq \mathbf{N}$ è creativo ed $f \in \mathcal{R}_t^{(1)}$ è una funzione iniettiva, non è detto che $f^{-1}(A)$ sia creativo;

   (d) come al punto precedente, ma con "produttivo" al posto di "creativo".

Suggerimento: negli ultimi due punti usare la caratterizzazione degli insiemi r.e. infiniti dell'Esercizio 6(a).

6. (a) Provare che le seguenti sono equivalenti per $B \subseteq \mathbf{N}$ infinito:
    i. B è r.e.;
    ii. esiste una funzione ricorsiva totale iniettiva f tale che $B = \mathrm{rg}(f)$.

   (b) Sia B <u>*r.e. non ricorsivo*</u> e sia $f \in \mathcal{R}_t^{(1)}$ una funzione <u>*iniettiva*</u> tale che $B = \mathrm{rg}(f)$. (Perché una tale f esiste?)
   Sia
$$A = \{\ x \in \mathbf{N} :\ \exists y (y > x \wedge f(y) < f(x))\ \}.$$
    i. Provare che A è r.e.
    ii. Completare: $\overline{A} = \{\ x \in \mathbf{N} :\ \forall y (\ldots\ldots)\}$.
    iii. Provare che $\overline{A}$ è infinito.
    Suggerimento: se $\overline{A}$ fosse finito, da un certo $\overline{n}$ in poi tutti i naturali sarebbero in A. Ricavare una contraddizione con il fatto che $\mathbf{N}$ è bene ordinato.
    iv. Sia f come sopra e sia $C \subseteq \mathbf{N}$, C infinito. Provare che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, esiste $c \in C$ tale che $f(c) > n$.
    v. Provare che $\overline{A}$ non contiene nessun r.e. infinito.
    Suggerimento: per assurdo, sia C r.e. infinito tale che $C \subseteq \overline{A}$. Ecco un procedimento di decisione per B (la formalizzazione è facoltativa): dato $n \in \mathbf{N}$, enumerare C finchè non si trova $c \in C$ tale che $f(c) > n$ (si veda iv.). Provare che
$$n \in B \Leftrightarrow n \in \{f(0), \ldots, f(c-1)\},$$
    e che quindi B sarebbe ricorsivo: contraddizione!