Calcolabilità

II appello 06–07

Regole:

Le domande 1.– 3. sono di tipo teorico: viene chiesto di enunciare e *dimostrare* risultati presentati a lezione;

Le domande 4.– 6. sono esercizi per verificare la padronanza delle tecniche.

Si deve rispondere a domande di entrambi i tipi

1. Insiemi r.e.: definizione e caratterizzazioni (con dimostrazioni).

2.
   (a) Definire l'estremo superiore di una coppia di m–gradi.
   (b) Provare che ogni coppia di m–gradi ha estremo superiore.
   (c) Come (b) per i T–gradi.

3.
   (a) Senza usare il Teorema di Rice–Shapiro, provare che l'insieme $T = \{x : \varphi_x \text{ è totale}\}$ non è r.e.
   (b) Come (a), ma usando il Teorema di Rice–Shapiro.

4. Sia f una funzione ricorsiva totale e sia

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbf{N} : \ B \text{ è produttivo con } f \text{ come funzione produttiva}\}.$$

   (a) Dare un esempio di f tale che $\mathcal{A} = \emptyset$.
   (b) Dare un esempio di f tale che $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
   (c) Provare che, se $A, B \in \mathcal{A}$, allora $A \cap B \in \mathcal{A}$.

5. (a) Enunciare il Teorema di Ricorsione.
   (b) Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}^{(1)}$ e sia $C = \{x : \ \varphi_x \in \mathcal{C}\}$. Provare che $C \not\leq_m C^c$.
   Suggerimento: procedere per assurdo.

(c) Sia C come al punto precedente. Provare che esiste un m–grado $\mathbf{d}$ tale che $d_m(C)$ e $\mathbf{d}$ sono inconfrontabili.

6. Siano A, B insiemi semplici e sia C un qualunque insieme r.e. Provare che:

   (a) $A \cup C$ è semplice, oppure è cofinito;

   Suggerimento: per provare una disgiunzione può essere utile verificare che, quando uno dei due disgiunti è falso, allora necessariamente è vero l'altro.

   (b) $A \cap B$ è semplice.

   Suggerimento: per provare che $(A \cap B)^c$ non contiene nessun r.e. infinito, supporre per assurdo che esista D r.e. infinito tale che $D \subseteq (A \cap B)^c$ e provare che $D \cap B$ non può essere finito e neppure infinito. Concludere.