Calcolabilità

III appello 06–07

Regole:

Le domande 1.– 3. sono di tipo teorico: viene chiesto di enunciare e *dimostrare* risultati presentati a lezione;

Le domande 4.– 6. sono esercizi per verificare la padronanza delle tecniche.

Si deve rispondere a domande di entrambi i tipi

1. Definire il semireticolo superiore degli m–gradi e provarne proprietà rilevanti.

2.

   (a) Provare che ogni m–grado ha cardinalità al più numerabile.

   (b) Quali sono gli m–gradi di cardinalità finita? (Motivare la risposta.)

3. Enunciando i teoremi utilizzati, provare che se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}^{(1)}$ è tale che $C = \{x : \varphi_x \in \mathcal{C}\}$ è r.e. non ricorsivo, allora l'insieme C è creativo.

4. Motivando la risposta, dire se la funzione γ così definita è ricorsiva:

$$\gamma(x) = \mu z(\varphi_x(z) \uparrow).$$

5. Sia $\psi \in \mathcal{R}^{(1)}$ una funzione iniettiva tale che $\mathrm{rg}(\psi)$ è un insieme ricorsivo e sia $A \subseteq \mathbf{N}$ un insieme ricorsivo. Provare che:

   (a) $\psi(A)^c = \mathrm{rg}(\psi)^c \cup \psi(A^c)$;

   (b) $\psi(A)^c$ è un insieme r.e.;

   (c) $\psi(A)$ è un insieme ricorsivo.

6. Siano A, B insiemi r.e. tali che $A \cup B = \mathbf{N}$ e $A \cap B \neq \emptyset$. Scopo dell'esercizio è provare, attraverso una serie di passi guidati, che $A \leq_m A \cap B$.

   (a) Provare che se $A \cap B = \{0\}$, allora A è ricorsivo e che quindi $A \leq_m A \cap B$.

(b) Sia $0 \neq \bar{n} \in A \cap B$ e siano P e Q due predicati ricorsivi come nel Teorema di rappresentazione di Kleene per A, B rispettivamente. Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \bar{n} \cdot c_P(x, \mu z(P(x,z) \vee Q(x,z))) + x \cdot c_Q(x, \mu z(P(x,z) \vee Q(x,z))).$$

Provare che f è una funzione ricorsiva totale e calcolare il valore di $f(x)$ quando $x \in A \setminus B$; $x \in (A \cap B)$ e $x \in B \setminus A$.

(c) Provare che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } f(x) = \bar{n} + x \\ f(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è ricorsiva e che $A \leq_m^g A \cap B$.

(d) Dedurre dai punti precedenti che $A \leq_m A \cap B$ per A, B come nelle ipotesi.