Calcolabilità 06 – 07

Esercizi – Settimana 10

1. Provare che ogni m–grado $\mathbf{a}$, con $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}, \mathbf{n}$ ha cardinalità infinita.

   Suggerimento: sia $A \in \mathbf{a}$ con complementare infinito (c'è sempre un tale A?) e siano $a \in A$, $b \notin A$. Provare che $A \equiv_m (A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ (usare la funzione che scambia a con b). Concludere.

2. Siano $A, B \subseteq \mathbf{N}$ tali che $A \leq_m B$. Provare che $A \oplus B \leq_m B$.

3. Provare che gli m–gradi non formano un semireticolo inferiore. (Pensare facile!)

4. Provare che ogni insieme m–completo è creativo.

   Nota: proveremo che vale anche l'implicazione inversa.

5. Sia A un insieme semplice e sia $\mathbf{a} = \mathrm{d}_m(A)$. Provare che $\mathbf{0}_m <_m \mathbf{a} <_m \mathbf{0}'_m$. (Si ricordi che $\mathbf{0}'_m = \mathrm{d}_m(K)$.)

6. (a) Siano $A, B \subseteq \mathbf{N}$. Provare che se $A \not\leq_m B$ e $B \not\leq_m A$ allora $A \not\equiv_m A \oplus B$ e $B \not\equiv_m A \oplus B$.

   (b) Provare che se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono due m–gradi inconfrontabili (cioè tali che $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}$, allora $\mathbf{a} <_m \sup(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $\mathbf{b} <_m \sup(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.