Calcolabilità 06-07

Esercizi – Settimana 1

1. Date due funzioni ψ ed η, cosa si intende scrivendo $\psi = \eta$? (In altre parole: com'è definita l'uguaglianza fra funzioni?)

2. Provare che la funzione $+ : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$, $(x, y) \mapsto x + y$ è ricorsiva.

   Suggerimento: usare la definizione ricorsiva della somma vista a lezione.

3. Come 1. per la funzione prodotto di due numeri naturali.

4. Data la funzione $\psi(x) = \mu y(x + y = 0)$, provare che

   (a) ψ è ricorsiva;

   (b) $\mathrm{dom}(\psi) = \{0\}$;

   (c) $\mathrm{ran}(\psi) = \{0\}$

   Modificare poi opportunamente la funzione ψ in modo da ottenere una funzione con dominio vuoto (una tale funzione si dice *sempre divergente*).

5. Provare che le seguenti sono equivalenti per ogni funzione f:

   (a) $f \in \mathcal{R}$ (cioè f è ricorsiva);

   (b) esiste una sequenza finita $f_0, f_1, \ldots f_n$ di funzioni tale che

      i. $f_n = f$;

      ii. per ogni $0 \leq i \leq n$, la funzione f_i è una funzione base ricorsiva, oppure f_i è ottenuta da alcune fra le f_j, con $j < i$, per applicazione di composizione, ricorsione primitiva a o minimizzazione.

   Suggerimento: per (b) $\Rightarrow$(a), provare –per induzione su n– che ogni funzione nella lista $f_0, \ldots, f_n$ è ricorsiva.

6. La *Congettura di Goldbach* (CG) afferma che ogni numero naturale pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi. Allo stato attuale delle conoscenze matematiche CG non è dimostrata nè refutata.

   Si consideri la funzione così definita:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se CG vale;} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   La funzione f è ricorsiva?

7. Sapendo che, mediante sviluppo in serie, è possibile definire una funzione totale ricorsiva f tale che

$$f(n) = n\text{–esima cifra dell'espansione decimale di } \pi,$$

discutere se le funzioni seguenti sono ricorsive.

(a)

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{se nell'espansione decimale di } \pi \text{ c'è} \\ & \text{una sequenza di esattamente } n \text{ cifre "1";} \\ & \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(b)

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{se nell'espansione decimale di } \pi \text{ c'è} \\ & \text{una sequenza di esattamente } n \text{ cifre "1";} \\ & \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Suggerimento: per (a) usare la Tesi di Church.