Calcolabilità 06 – 07

Esercizi – Settimana 11

....Supponiamo ci venga chiesto di scrivere un programma P che dipende da un input x, ma *anche* da P stesso. (Per fare un esempio semplice, supponiamo che l'output rappresenti il costo di funzionamento del nostro computer, incluso il nostro onorario per la scrittura del programma, il quale dipende dalla lunghezza del programma che scriviamo.) ... a prima vista potremmo sospettare che questo problema è irrisolvibile. Potremmo obiettare che non ci può essere ragionevolmente chiesto di scrivere un programma senza conoscere anticipatamente ciò che il programma è supposto fare; e nel caso in questione ciò che il programma è supposto fare dipende dall' –ancora non scritto– programma stesso. Un programmatore di fronte ad un tale compito potrebbe sentirsi come i saggi di Babilonia quando Nabuccodonosor ordinò loro non solo di interpretare un suo sogno, ma di indovinare quale fosse il sogno (Daniele, cap. 2).
[Traduzione da: J. Bell e M. Machover - *A course in mathematical logic*, North-Holland, Amsterdam, 1986]

1. Provare che *il Teorema di Ricorsione garantisce l'esistenza di un programma come sopra*!

   Suggerimento: sia f la funzione ricorsiva totale ottenuta applicando S-1-1 Teorema alla funzione $\psi(x, y) = x$ e sia n un punto fisso nell'enumerazione di funzioni ricorsive associata ad f. Osservare che $\varphi_n(x) = n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

   Nota: se pensiamo ad un indice di una funzione ricorsiva come ad una codifica della funzione stessa, concludiamo che φ_n *è una funzione che si autoreplica.*

2. Provare che il Teorema di Ricorsione ha come conseguenza il fatto che K non è ricorsivo. (Non usare il Teorema di Rice!)

3. Provare che esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $W_n = \{0, \ldots, n\}$.

4. Provare che esiste $e \in \mathbf{N}$ tale che $W_e = E_e = \{en : n \in \mathbf{N}\}$.

5. Provare che esiste $e \in \mathbf{N}$ tale che $\varphi_e(x) = e^2$ per ogni $x \in \mathbf{N}$.

6. Esiste un numero naturale e tale che $W_e = \{x : \varphi_e(x) \uparrow\}$?

7. Dare un esempio di una funzione $f \in \mathcal{R}_t^{(1)}$ tale che

   (a) se φ_x è totale anche $\varphi_{f(x)}$ lo è;

   (b) non c'è nessun punto fisso n nell'enumerazione data da f tale che φ_n sia una funzione totale.

   Suggerimento: si consideri $\psi(x, y) = \varphi_x(y) + 1$.