Calcolabilità 06 – 07

Esercizi – Settimana 13

1. Provare che:

   (a) $d_m(A) \subseteq d_T(A)$ per ogni $A \subseteq \mathbf{N}$;

   (b) ogni T-grado è unione di m-gradi.
   Suggerimento: usare il punto (a).

2. Provare che i seguenti insiemi sono T–completi (cioè sono r.e. ed ogni insieme r.e. è T-riducibile a ciascuno di essi):

   (a) $\{x : x \in E_x\}$;

   (b) $\{x : W_x \neq \emptyset\}$.

3. (a) Provare che esiste una sequenza infinita strettamente crescente $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di T–gradi (cioè $\mathbf{a}_n < \mathbf{a}_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$).

   (b) Sia $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una sequenza strettamente crescente di T–gradi e, per ogni $n \in \mathbf{N}$, sia $A_n \in \mathbf{a}_n$ Sia $A = \{\langle n, a\rangle : n \in \mathbf{N} \text{ e } a \in A_n\}$. Provare che $\mathbf{a}_n < d_T(A)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

4. Siano A, B, C sottoinsiemi di $\mathbf{N}$. Provare che:

   (a) se A è B-ricorsivo e B è C-ricorsivo allora A è C-ricorsivo;

   (b) se A è B-r.e. e B è C-ricorsivo allora A è C-r.e.;

   (c) se A è B-ricorsivo e B è C-r.e. allora non necessariamente A è C-r.e.

5. Siano $A, B \subseteq \mathbf{N}$. Provare che A è B–r.e se e soltanto se $A \leq_m K^B$.

   Suggerimento: per l' implicazione da sx a dx, ricordare che l'S-1-1 Teorema relativizzato assicura l'esistenza di una funzione *ricorsiva*; per l'altra implicazione, dall'ipotesi ricavare che la funzione caratteristica parziale di A è in $\mathcal{R}^B$.

6. Siano A, B sottoinsiemi di $\mathbf{N}$. Provare che le seguenti sono equivalenti:

   (a) $A \leq_T B$;

   (b) $K^A \leq_m K^B$.

   Suggerimento: per (a)$\Rightarrow$(b) provare che K^A è B–r.e. ed usare l'Esercizio 5; per (b)$\Rightarrow$(a) provare che A e $\overline{A}$ sono B–r.e (ricordare che A e $\overline{A}$ sono A–r.e. e quindi sono m–riducibili a K^A ed usare l'Esercizio 5).

7. Dare un esempio di una catena infinita crescente di T–gradi.

8. Qaul è la cardinalità di un T–grado? Qual è la cardinalità dell'inisieme dei T–gradi?