Calcolabilità 06-07

Esercizi – Settimana 2

1. Provare che le seguenti funzioni sono ricorsive:

   (a) Fissati $n, m > 0$ la funzione n-aria definita da $f(\bar{x}) = m$, per ogni $\bar{x} \in \mathbf{N}^n$.

   (b) (*massimo*) $\max(x, y)$;

   (c) (*minimo*) $\min(x, y)$;

   (d) $q(x, y) = \begin{cases} \text{quoziente della divisione intera di } x \text{ per } y & \text{se } y \neq 0, \\ \uparrow & \text{altrimenti.} \end{cases}$

   (e) $rm(x, y) =$ resto della divisione intera di x per y.

2. Provare che, per ogni naturale n, esiste una funzione ricorsiva n–aria con dominio vuoto.

3. Provare che la classe $\mathcal{R}$ delle funzioni ricorsive è chiusa per

   (a) *permutazione di variabili*, cioè se $\psi(x, y, \bar{z}) \in \mathcal{R}$ allora $\eta(x, y, \bar{z}) = \psi(y, x, \bar{z})$ è in $\mathcal{R}$;

   (b) *introduzione di variabili fittizie*, cioè se $\psi(\bar{x}) \in \mathcal{R}$ allora $\eta(\bar{x}, y) = \psi(\bar{x})$ è in $\mathcal{R}$;

   (c) *identificazione di variabili*, cioè se $\psi(x, y, \bar{z}) \in \mathcal{R}$ allora $\eta(x, \bar{z}) = \psi(x, x, \bar{z})$ è in $\mathcal{R}$.

4. Sia $\psi(x, \bar{y})$ una funzione ricorsiva. Provare che le seguenti sono ricorsive:

   (a) $\eta(z, \bar{y}) = \sum_{x<z} \psi(x, \bar{y})$;

   (b) $\mu(z, \bar{y}) = \prod_{x<z} \psi(x, \bar{y})$.

   Suggerimento: usare ricorsione primitiva.

5. Data ψ una funzione ricorsiva ternaria, definiamo la funzione binaria η per *minimizzazione limitata* su ψ come segue:

   $$\eta(x, z) = \mu y \leq z(\psi(x, y, z) = 0),$$

   dove $\mu y \leq z$ si comporta come la minimizzazione, con la limitazione che i valori esaminati sono gli $y \leq z$. Provare che η è ricorsiva.

6. Si ricordi che la funzione

$$\begin{array}{rccc} \langle\, , \,\rangle : & \mathbf{N}\times\mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y \end{array}$$

è una biiezione ricorsiva.

Provare *formalmente* che esistono due funzioni totali *primitive ricorsive* 1-arie p_1 e p_2 che soddisfano le seguenti per ogni $m, n \in \mathbf{N}$:

$$p_1(\langle m,n\rangle) = m; \quad p_2(\langle m,n\rangle) = n; \quad \langle p_1(n), p_2(n)\rangle = n.$$

Suggerimento: osservare che $m, n \leq \langle m, n\rangle$ per ogni $m.n \in \mathbf{N}$.

7. Provare che se $A, B \subseteq \mathbf{N}$ sono ricorsivi, allora lo sono anche $A \cup B$ e $A \cap B$.

8. Provare formalmente che, se f è una funzione totale ricorsiva 1-aria ed iniettiva, allora la funzione ψ tale che $\mathrm{dom}(\psi) = \mathrm{rg(f)}$ e $\psi \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$ è ricorsiva.

9. Provare formalmente che, se f è una funzione totale ricorsiva 1-aria, allora la funzione η definita da:

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathrm{rg}(f), \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è ricorsiva.