Calcolabilità 06 – 07

Esercizi – Settimana 3

Informalmente, un *predicato* in n argomenti è una espressione matematica che, su ogni n-pla di naturali prende valore "vero" oppure valore "falso" (esempi: "x è pari", "x ed y sono relativamente primi", "z è la media aritmetica di x ed y", ...)

Definizione: Un predicato P è ricorsivo se la sua funzione caratteristica

$$c_P(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } P(\bar{x}) \text{ è vero,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è ricorsiva.

1. (*Definizione per casi*) Siano $f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})$ funzioni totali ricorsive n-arie e $P_1(\bar{x}), \ldots, P_n(\bar{x})$ predicati ricorsivi n-ari tali che per ogni $\bar{x} \in \mathbf{N}^n$, esiste esattamente un $1 \leq i \leq n$ per cui $P_i(\bar{x})$ vale.Provare che la funzione $f(\bar{x})$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(\bar{x}) & \text{se } P_1(\bar{x}) \text{ vale,} \\ \vdots & \vdots \\ f_n(\bar{x}) & \text{se } P_n(\bar{x}) \text{ vale.} \end{cases}$$

   è totale ricorsiva.

2. (*Generalizzazione dell'esercizio precedente a funzioni parziali ricorsive.*)

   Siano ψ_1 e ψ_2 funzioni ricorsive unarie e sia P un predicato ricorsivo unario. Provare *senza usare Tesi di Church* che la funzione η definita da

$$\eta(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & \text{se } P(x) \text{ vale,} \\ \psi_2(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   è ricorsiva.

   Suggerimento 1: Siano e_1 ed e_2 indici per ψ_1, ψ_2 rispettivamente e sia $\psi_U^{(1)}$ la funzione universale per $\mathcal{R}^{(1)}$. Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} e_1 & \text{se } P(x) \text{ vale,} \\ e_2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   Verificare (formalmente) che $f \in \mathcal{R}_t^{(1)}$.

Concludere che $\eta \in \mathcal{R}^{(1)}$, osservando che $\eta(x) = \psi_U^{(1)}(f(x), x)$.

Domanda: Perché scrivere $\eta = \psi_1 c_P + \psi_2 c_{\neg P}$ non è corretto?

Osservazione: Quanto fatto si estende immediatamente ad un qualsiasi numero finito di funzioni e di predicati della stessa arietà k, quando i predicati soddisfano la condizione dell'esercizio 1. Verificarlo.

3. (*Esercizio importante per la tecnica che presenta.*)

   Provare che il seguenti predicato non è ricorsivo:

   (a) "$x \in W_x$".

   Per assurdo, si supponga che "$x \in W_x$" è ricorsivo. Si consideri la funzione
   $$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin W_x, \\ \uparrow & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
   Senza usare Tesi di Church, si provi che ψ è ricorsiva. Sia e un indice per ψ. Trovare una contraddizione ragionando su $\psi(e) = \varphi_e(e)$.

   $\ast\ast\ast\ast$ La tecnica di risoluzione proposta è detta *per diagonalizzazione.*

4. Provare in dettaglio (*senza fare ricorso alla Tesi di Church*) che la funzione ψ definita da $\psi(x) = \psi_U^{(1)}(x, x) + 1$, $x \in \mathbf{N}$, è ricorsiva.

5. (a) Un predicato è *finito* se la sua estensione (cioè l'insieme degli elementi che lo soddisfano) è un insieme finito. Provare che ogni predicato finito è ricorsivo.

   (b) Un predicato è *cofinito* se la sua estensione è un insieme cofinito. (Un insieme è cofinito se il suo complementare è finito.) Provare che ogni predicato cofinito è ricorsivo.