Calcolabilità 06 – 07

Esercizi – Settimana 4

1. Provare che se $P(\bar{x}, z)$ è un predicato ricorsivo, allora lo sono anche
   (a) $Q(y, \bar{x}) \equiv \exists z \leq y\, P(\bar{x}, z)$;
   (b) $R(y, \bar{x}) \equiv \forall z \leq y\, P(\bar{x}, z)$.

   Quindi i predicati ricorsivi sono chiusi per quantificazioni esistenziali ed universali limitate.

2. Provare che gli insiemi ricorsivi non sono chiusi per unioni o intersezioni infinite.

   Suggerimento: per le unioni infinite, osservare, ad esempio, che $\overline{K} = \bigcup_{x \in \overline{K}} \{x\}$ e ricordare che ogni insieme finito è ricorsivo.

3. Mediante applicazione di *S-m-n* Teorema provare che
   (a) esiste una funzione $f \in \mathcal{R}_t^{(1)}$ tale che
   $$W_{f(x)}^{(n)} = \{(y_1, \ldots, y_n) :\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = x\}$$
   per ogni $x \in \mathbf{N}$;
   (b) esiste una funzione $k \in \mathcal{R}_t^{(1)}$ tale che $E_{k(x)} = W_{k(x)} = W_x$ per ogni $x \in \mathbf{N}$.

4. Provare che i seguenti predicati non sono ricorsivi (n è un fissato numero naturale):
   (a) (*Predicato dell'accettazione o dell'input*) "$n \in W_x$".
   Suggerimento: si consideri la funzione
   $$\eta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in W_x, \\ \uparrow & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
      i. Provare formalmente (senza usare Tesi di Church) che $\eta \in \mathcal{R}^{(2)}$.
      ii. Applicare *S-m-n* Teorema a η.
      iii. Sia f la funzione ottenuta per applicazione di *S-m-n* Teorema a η. Provare che $n \in W_{f(x)} \Leftrightarrow x \in W_x$.
      iv. Provare che se "$n \in W_x$" fosse decidibile, lo sarebbe anche "$n \in W_{f(x)}$".

v. Concludere che allora “$x \in W_x$” sarebbe decidibile: contraddizione.

…si poteva risolvere l’esercizio in modo molto più veloce?

(b) (*Problema della stampa o dell’output*) “$n \in E_x$”.

5. Provare che i seguenti predicati non sono ricorsivi.

   (a) “$W_x = W_y$”;
   Suggerimento: se “$W_x = W_y$” fosse ricorsivo, lo sarebbe anche “$W_x = \mathbf{N}$”, ma quest’ultimo significa che…;

   (b) “$\varphi_x(x) = 0$”;

   (c) “$\varphi_x(y) = 0$”;

   (d) “$x \in E_y$”;

   (e) “φ_x è totale e costante”;

   (f) “$W_x = \emptyset$”;

   (g) “E_x è infinito”;

   (h) “$\varphi_x = \psi$”, dove ψ è una fissata funzione parziale ricorsiva.
   Suggerimento: procedere come per il predicato “$\varphi_x = z$”. Bisogna però distinguere il caso in cui ψ è la funzione sempre divergente *div*.