Calcolabilità 06 – 07

Esercizi – Settimana 5

1. Un predicato $P(\bar{x})$ è ottenuto *per quantificazione esistenziale* da un predicato $Q(\bar{x}, y)$ se $P(\bar{x}) \equiv \exists y Q(\bar{x}, y)$.

   Provare che, se P e Q sono come sopra e Q è ricorsivo, allora P è r.e.

2. Siano $A, B \subseteq \mathbf{N}$. Provare che se $A \leq_m B$ allora $A^c \leq_m B^c$.

3. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{N}$ sono ricorsivi/sono r.e./hanno complementare r.e.?

   (a) $A = \{x : x \in W_x\}$;

   (b) $B = \{x : x$ è somma di due numeri primi consecutivi$\}$;

   (c) $C = \{x : \varphi_x$ è iniettiva$\}$;
   Suggerimento: m–ridurre l'insieme K^c all'insieme C. (Può essere utile notare che la funzione sempre divergente *div* è iniettiva. Perché?)

   (d) $D = \{x : P(x)\}$, dove $P(x)$ è il predicato "esiste una sequenza di almeno x cifre "1" consecutive nell'espansione di π".

4. Provare che le seguenti sono equivalenti per $A \subseteq \mathbf{N}$:

   (a) A è r.e.;

   (b) esiste $\psi \in \mathcal{R}^{(1)}$ tale che $\mathrm{dom}(\psi) = A$.

   Quindi *gli insiemi r.e. sono esattamente i domini delle funzioni ricorsive.* (Avremmo potuto dare dare quest'ultima come definizione di insieme r.e.)

5. Sia A un sottoinsieme r.e. infinito di $\mathbf{N}$. Provare che esiste una funzione totale ricorsiva f che enumera A senza ripetizioni (cioè f è iniettiva e $\mathrm{rg}(f) = A$).

6. Sia $f \in \mathcal{R}_t^{(1)}$ e siano A un sottoinsieme ricorsivo e B un sottoinsieme r.e. di $\mathbf{N}$. Provare che

   (a) $f^{-1}(A)$ è ricorsivo.
   Suggerimento: dopo aver provato che $f^{-1}(A)$ è r.e., osservare che $f^{-1}(A^c) = \mathbf{N} \setminus f^{-1}(A)$.

   (b) $f(A), f(B)$ e $f^{-1}(B)$ sono insieme r.e., ma non necessariamente ricorsivi.

Quali informazioni aggiuntive su questi insiemi si possono ricavare se f è una biiezione?

7. Provare che se P e $\neg P$ sono predicati r.e., allora P è ricorsivo.

   Suggerimento: siano Q ed R predicati ricorsivi tali che $P(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists z Q(\bar{x}, z)$ e $\neg P(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists z R(\bar{x}, z)$ e siano c_Q e c_R le loro funzioni caratteristiche. (Dire perché tali Q ed R esistono.) Provare formalmente che la funzione

   $$c_Q(\bar{x}, \mu z(\overline{sg}(c_Q(\bar{x}, z) + c_R(\bar{x}, z)) = 0))$$

   è totale ricorsiva e calcola $c_P(\bar{x})$.

8. Provare che l'insieme $A = \{x \in \mathbf{N} : \varphi_x \text{ non è totale}\}$ non è r.e.

   Suggerimento: m–ridurre K^c ad A utilizzando la funzione

   $$\eta(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in W_x, \\ \uparrow & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   Osservazione: proveremo che anche l'insieme A^c non è r.e. Abbiamo dunque un esempio di un insieme A tale che nè A nè A^c sono r.e.